HOOFDSTUK 19 WISKUNDE 33 pag

In dit boek komt, eigenlijk tegen mijn oorspronkelijke bedoeling in, nogal wat rekenwerk en wiskunde voor. Maar ik ben op mijn zoektocht nu eenmaal met allerlei soorten wiskunde in aanraking gekomen en heb moeten besluiten er toch maar (niet te diep!) in te duiken. Wie daar problemen mee heeft of geen interesse, nou die moet dit hoofdstuk maar overslaan. Wil je er wél wat over weten? Hier wat bevindingen en wetenswaardigheden.

Wat is wiskunde? In allerlei talen heet dit vak zoiets als “mathematics”, “matemáticas”, “Matematiek”, “matematique” etcetera. Maar wij, Nederlanders hebben er een éigen woord voor! Hoe komen wij daar aan? Ons Nederlandse woord “wiskunde” komt van een redelijk beroemde Nederlandse geleerde: Simon Stevin, geboren in Leiden of Den Haag, maar volgens mij “wis en zeker” een Scheveninger, want dat leerde ik daar al op de lagere school en in Scheveningen kom je die naam nogal eens tegen. Mijn lagere school stond zelfs in de “Stevinstraat”! Hij zou ook de “zeilwagen” uitgevonden hebben (big deal!), voorloper van het zeilsurfen op het strand!

En de wiskunde zelf? Eigenlijk niets anders dan een verzameling rekenmethodes om allerlei zaken te berekenen. Al in de vroege oudheid, toen wij hier nog in berenvellen liepen en met knotsen zwaaiden, gebruikten de Babyloniers, Egyptenaren, Grieken, Arabieren en andere volken al de eerste vormen van wiskunde om allerlei zaken te berekenen en te verklaren. Bij diverse metingen en berekeningen, bij sterrenkunde, natuurkunde, in de techniek, chemie enzovoort, heb je aan wiskunde een handig hulpmiddel. Het is voor mij dan ook een onbegrijpelijke zaak dat er in het onderwijs de laatste jaren zo weinig aandacht aan besteed is en wordt. Het was (is?) zelfs een keuzevak, terwijl naar mijn mening enige kennis van wiskunde haast noodzakelijk is om door het leven te komen! De laatste tijd lijkt men er weer wat anders over te denken.

Er zijn allerlei soorten wiskunde, maar de bekendste zijn natuurlijk “algebra” en “meetkunde”. Dat woord “algebra” komt trouwens uit het Arabisch: Een man uit Oezbekistan, die in Irak woonde, schreef ooit (rond 800) een beroemd wiskundeboek: “al Kitab al Muktasar al-djabr……”, het samenvattende boek over berekenen….! Dat laatste woord uit de titel: “al-djabr”, dat “samenvatten” betekent, dát zou de oorsprong van het woord “algebra” zijn! Maar …. hoe heette die geleerde? Wil je dat echt weten? Ik had nog nooit van hem gehoord! Hij heette Aboe Djafar Mohammed, bijgenaamd “de man uit Chwarizin” (nu Chiwa in Oezbekistan). En waar komen die verschillende woorden voor meetkunde vandaan, planimetrie, gonio en zo? Die komen uit het Grieks. Die jongens waren er ook al vroeg bij. Euclides (300 voor Christus) was één van de beroemdste Griekse wiskundigen, maar woonde in Alexandrië in Egypte, een gastdocent dus. Hij is de grondlegger van de Euclidische meetkunde zoals we die vroeger (en nu nog steeds) leerden.

En dan hebben we natuurlijk ook nog onze Pythagoras, 575 vóór Christus op het eiland Samos geboren! Hij was zo geleerd en bekend dat, als hij iets gezegd had, het automatisch waar was: “*Autos ephi!*”, “Hij heeft het zelf gezegd!”

Zo zijn dus door die Griekse wiskundigen de woorden “planimetrie”, “goniometrie”, “trigonometrie” en “stereometrie” ontstaan, respectievelijk: vlakke meetkunde, hoekmeting, driehoeksmeting en ruimtelijke meetkunde. En ook nog de woorden “parabool”, “hyperbool”, “ellips”, namen voor kegelsneden!

Als enigszins getalenteerd tekenaar was ik vroeger al geïnteresseerd in die kromme lijnen. Elke “kromme” of “curve” zou in een formule omgezet kunnen worden. Ja ja, maar hoe? Ik moest er onlangs opnieuw aan denken. Als ik, overwinterend in Spanje, daar langs het strand loop, zie ik dat de golven iedere keer een nieuwe “kromme”, een nieuwe “curve” vormen. Een golfje komt op het strand af, brengt wat zand aan, trekt zich terug en laat steeds weer een nieuwe donkere lijn van zwart zand achter: een grafische afbeelding van de wiskunde van de zee! Welke formules zouden toch achter die curven van de branding steken?

Fig. 19.1. “Zeecurves”.

Andersom kan iedere wiskundige formule dus ook grafisch, als “kromme” en in een enkel geval als “rechte” weergegeven worden. En een paar van die “curven” kennen we misschien wel: de “kegelsneden”. Daar wil ik later nog wel wat meer over weten en verklaren, maar eerst het volgende.

Letters in formules

Ik heb, zoals beloofd, in dit boek alleen eenvoudige formules gebruikt, dus geen moeilijke vergelijkingen, geen differentiaal- en integraalrekeningen enz., voornamelijk omdat ik daar zelf ook nog steeds weinig van weet. In m’n drang om te gaan varen indertijd, ben ik jammer genoeg te vroeg van de HBS afgegaan, met “diploma 3 jaar HBS”, want dat was genoeg om naar de zeevaartschool te gaan. Helaas heb ik daardoor maar weinig kennis van “hogere wiskunde” en, hoewel ik er ooit nog wel meer van wilde weten, heb ik dat voorlopig maar naar m’n volgende leven verschoven!

Op de lagere school leer je rekenen, je moet de tafels uit je kop leren en na enige jaren gaat het rekenen dan steeds beter. Dan naar het hoger onderwijs, bijvoorbeeld naar het lyceum. Daar kreeg ik voor ’t eerst met wiskunde te maken.

Het belangrijkste verschil met rekenen: cijfers werden plotseling als letters aangegeven! Maar…. niet altijd: 3a, 5b, 2x enz. Ik snapte er niets van. Ik moest er verschrikkelijk aan wennen, zo erg dat ik in ’t begin slechte cijfers had. Natuurlijk: “Dat lag aan de leraar” (dat was een zekere “Kiers”), maar toen ik een andere kreeg (“Kleyn”) ging het ineens veel beter! In de wiskunde worden getallen nu eenmaal heel vaak door letters aangegeven en dat heb je, ook als je Jacob heet, maar te accepteren! En…. zo’n letter kan dan van alles zijn.

Als je zegt: **a + b = c**, dan kan **a** en **b** van alles zijn, maar **c** niet, **c** moet de som van **a** en **b** zijn, anders mag er geen = (“is gelijk aan”) teken tussen staan. En als Brigitte Kaandorp vertelt dat haar ineens de formule $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$ te binnen schoot, dan geldt hetzelfde. Nemen we daarin 3 voor **a**, 4 voor **b** dan blijkt c dus 5 te zijn want $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ en $5^2 = 25$, en 9 + 16 is inderdaad 25, mooie ronde (“gehele”) getallen! Maar dat is eigenlijk wel toevallig, want nemen we andere cijfers, dan gaat dit vaak niet meer op! Nemen we bijvoorbeeld 2 voor **a** en 3 voor **b** dan wordt $\mathbf{c^2}$ dus 4 + 9 = 13! En de wortel uit 13 is ongeveer 3,6056 en dat is geen mooi “rond” getal!

Overigens zijn er oneindig veel combinaties voor $a^2 + b^2 = c^2$, die wél uit gehele getallen bestaan! Oneindig veel? Ja, want bijvoorbeeld ook $5^2 + 12^2 = 13^2$, want 25 + 144 = 169 en zo zijn er nog wel meer. Maar… dat zijn er toch niet “oneindig veel”? Ja, toch wel,

want je kunt ze ook verdubbelen! Dus als $3^2 + 4^2 = 5^2$ dan is ook $6^2 + 8^2 = 10^2$ en $12^2 + 16^2 = 20^2$ enz., enz. tot in "het oneindige"!
Hier zijn enige combinaties die uit gehele getallen bestaan en die dus tot in het oneindige verdubbeld kunnen worden:

- $3^2 + 4^2 = 5^2$ $\quad$ $5^2 + 12^2 = 13^2$ $\quad$ $7^2 + 24^2 = 25^2$
- $8^2 + 15^2 = 17^2$ $\quad$ $20^2 + 21^2 = 29^2$

Waarom zijn er zoveel combinaties van kwadraten, die aan het criterium "gehele getallen" voldoen? Dat kón ik ooit bewijzen, dus dat zullen anderen ook wel kunnen. Het heeft te maken met het verschil tussen twee opeenvolgende kwadraten, dat neemt steeds met twee toe. Trouwens die stelling die Kaandorp in haar show noemde: **"$a^2 + b^2 = c^2$"**, dat is natuurlijk de beroemde "Stelling van Pythagoras", bijgenaamd de "Stelling van Piet Hagelslag". Deze oude Griekse geleerde kwam ooit tot de volgende ontdekking: neem je een rechthoekige driehoek, dan geldt:

"De oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde is gelijk aan de som van de oppervlaktes van de vierkanten op de rechthoekzijden!"

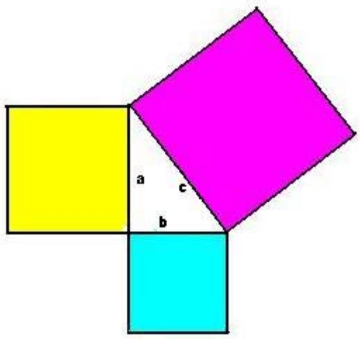


Fig 19.2 Pythagorasdriehoek

Kijk naar de figuur: de oppervlaktes van het gele en het cyaanblauwe vierkant zijn samen gelijk aan de oppervlakte van het magenta vierkant! Als we nu de rechthoekzijden **a** en **b** noemen en de schuine zijde ("hypotenusa" in het Grieks) **c**, dan zijn de oppervlaktes van die vierkanten $a \times a = a^2$, $b \times b = b^2$ en $c \times c = c^2$, dan is dus $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$, maar ik vraag me af of Pyth dit toen ook zo bekeken heeft!

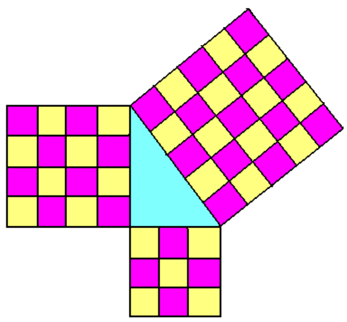
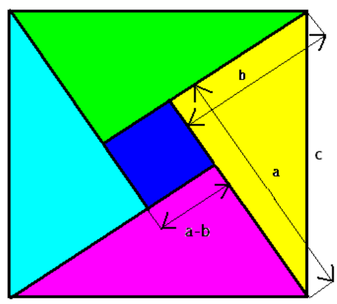


Fig 19.3 3-4-5 Driehoek

Uit deze tekening van een "3-4-5" driehoek blijkt de waarheid van de stelling heel duidelijk, tel de vierkantjes maar op. Voor deze "stelling van Pythagoras" zijn ontelbaar (maar niet oneindig) veel bewijzen. Hier volgen er twee.

Fig. 19.4 Pythagorasvierkant



Bewijs 1:
Met de bijgaande figuur kunnen we de stelling heel eenvoudig bewijzen. We zien een bepaald vierkant met zijden **c,** waarin vier gelijke rechthoekige driehoeken met zijden **a** en **b**. Twee van deze rechthoekige driehoeken vormen samen een rechthoek met oppervlakte: **ab.** Die vier rechthoekige driehoeken hebben dus samen een oppervlakte: **2ab**. Het middelste vierkantje heeft oppervlak:
$\mathbf{(a - b) \times (a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$
Deze vijf figuren hebben samen dus de zelfde oppervlakte als het gehele vierkant met oppervlakte $\mathbf{c \times c = c^2}$!
We kunnen dus schrijven dat:

$$\mathbf{c^2 = 2ab + (a^2 - 2ab + b^2) = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2}$$

en dat moesten we bewijzen! Q.E.D! Quod erat demonstrandum!

Bewijs 2.
Met behulp van de volgende afbeelding is het bewijs ook zeer eenvoudig. Kijk maar:

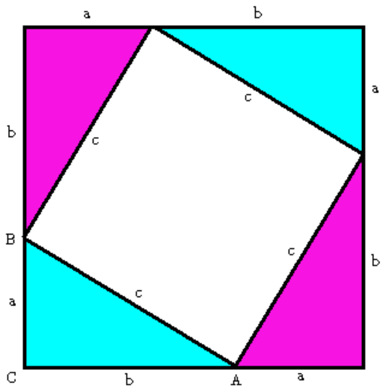


Fig. 19.5   2e Pythagorasvierkant

We weten natuurlijk nog wel dat de oppervlakte van een driehoek: "basis maal halve hoogte" bedraagt! De vier rechthoekige driehoeken hebben samen dus een oppervlakte:

4 x ½ ab = 2ab **(1).**

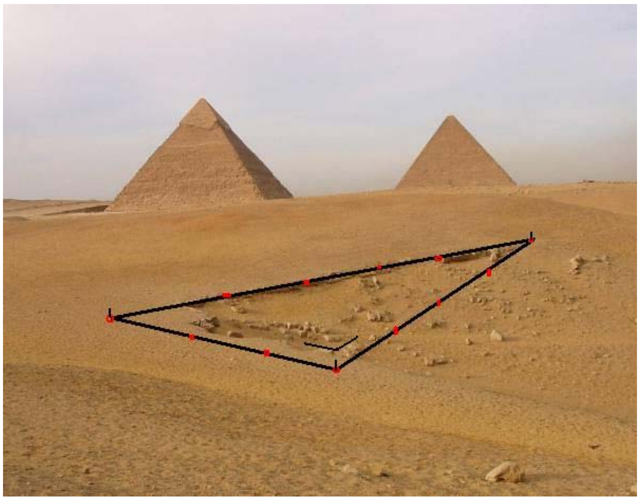
Het binnenste vierkant heeft oppervlak: **c x c =** $\mathbf{c^2}$ **(2).**

Het gehele vierkant heeft zijden **(a+b)** dus een oppervlakte van:

$\mathbf{(a + b).(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ **(3).**

We kunnen dus zeggen dat: **(3) = (1)+(2).** Dus: $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \rightarrow a^2 + b^2 = c^2}$**!**
En dat is het tweede simpele bewijs voor DE STELLING van PYTHAGORAS!

Q . E . D .



Bekend is dat de oude Egyptenaren 4000 jaar geleden deze stelling ook al kenden, zij gebruikten de "drie, vier, vijfregel" voor het uitzetten van rechte hoeken (van de piramides?). Ze deden dat, denkt men, met een touw met ringen erin! Ze namen drie "haringen", staken die door de juiste ringen van het touw in het zand, vormden een "drie, vier, vijf" driehoek en verkregen zo dus een perfecte rechte hoek.

Fig. 19.6 De uitgezette "drie vier vijf" driehoek.

"Hogere machten"

Terwijl er voor $a^2 + b^2 = c^2$ oneindig veel combinaties van gehele getallen zijn die hieraan voldoen, las ik ooit dat dit niet geldt voor "hogere machten", dus voor $a^3 + b^3 = c^3$ enzovoort. Ja, dacht ik, dat is natuurlijk logisch, bij derde machten moet je natuurlijk drie derde machten nemen dus: $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ en bij vierde machten vier vierde machten enzovoort.

Zijn er zó voor die andere machten ook oneindig veel combinaties met gehele getallen? Misschien, in ieder geval wél voor derde machten! Bij vierde machten heb ik (nog) niets gevonden en aan "hogere machten" heb ik me (nog) maar niet gewaagd. Bij derde machten heb ik (en ik denk ik niet alleen) er twee gevonden die dus oneindig vaak verdubbeld kunnen worden. Hier komen ze:

- $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 \quad \rightarrow \quad 27 + 64 + 125 = 216$

- $3^3 + 10^3 + 18^3 = 19^3 \rightarrow 27 + 1000 + 5832 = 6859$

Daar het hier om derde machten gaat heb ik getracht, naar analogie van de rechthoekige driehoek, een driedimensionaal rechthoekig "lichaam" te bedenken, voor een eventuele "stelling van Jacob": *De inhoud van de kubus op de zijden van een……"* of : *"de inhoud van de piramide op een…"*, maar dát is mij helaas (nog) niet gelukt. Jammer, maar ik zoek wél verder! Trouwens, een bewijs voor genoemd wiskundige "fenomeen" bij derde machten heb ik niet en is er, voor zo ver ik weet, ook niet!

Toegepaste formules

Wiskundekenners s.v.p dit overslaan, alleen lezers die wat van de beginselen van de wiskunde willen weten.

De formules in dit boek en de onderwerpen die wat verder nog in dit hoofdstuk beschreven worden, behoren allemaal tot de zeer elementaire wiskunde. Wie die al beheerst kan deze paragraaf, de paragrafen "merkwaardige producten" en "notatie" dus gevoegelijk overslaan.

Eigenlijk zou ik hier niet over deze elementaire zaken moeten schrijven, maar door mijn schoolmeesterachtige inslag (zoon van) vond ik het toch nodig. Nou ja, beschouw het maar als mijn bijdrage aan het thema: "Kies exact" voor de niet-wiskundigen.
In dit boek is de meest toegepaste formule een zeer eenvoudige, namelijk:

$\mathbf{A = B \times C}$ (kan ook met kleine letters: $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$)

met de varianten:

$\mathbf{A = B \times C^2}$, voorbeeld: Einsteins $\mathbf{E = m \cdot c^2}$

$\mathbf{A = B \times C \times D}$, voorbeeld: Plancks $\mathbf{E = n \cdot h \times \upsilon}$

<u>Voor de zekerheid even het volgende:</u>

Het maalteken: "x" kunnen we ook als een punt "**.**" schrijven of zelfs weglaten. Dus:

$\mathbf{A \times B = A \cdot B = AB}$

Het deelteken " **:** " betekent "gedeeld door" of "staat tot" en kunnen we ook schrijven als **" / "** of als breuk.

Dus: $\mathbf{A : B = A / B = \frac{A}{B}}$

We moeten ook nog even weten dat als **A** gelijk is aan **B** <u>maal</u> **C**, dan ook **B** gelijk is aan **A** <u>gedeeld</u> door **C**" en tevens is: "**C** is gelijk aan **A** <u>gedeeld</u> door **B**"!

In formulevorm:

$\mathbf{A = B \times C \rightarrow B = A : C}$ **of:** $\mathbf{B = A/C}$ **of:** $\mathbf{B = \frac{A}{C}}$

En: **$A = B \times C \rightarrow C = A : B$ of: $C = A/B$ of: $C = \frac{A}{B}$**

In cijfers nu! Zo is bijvoorbeeld:

$6 = 2 \times 3 \rightarrow 2 = 6 : 3$ of $3 = 6 : 2$ ($\rightarrow$ betekent: “hieruit volgt”)

Wat ook nogal eens voorkomt zijn “<u>verhoudingen</u>”, zoals:

$A : B = C : D$

Of in woorden: “**A** staat tot **B** is als **C** staat tot **D**”. Voorbeeld **$2 : 3 = 4 : 6$**

We kunnen ook schrijven:

$A / B = C / D$ of **$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$**

Nu hoeven we alleen nog te weten dat als:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

dan is **$A \times D = B \times C$ (of $AD = BC$)!**

Dit noemt men “**kruiselings vermenigvuldigen**”.
Ook het omgekeerde geldt! Als:

$AB = CD$, dan is: **$\frac{A}{C} = \frac{D}{B}$ en $\frac{A}{D} = \frac{C}{B}$**, en verder is ook **$\frac{C}{A} = \frac{B}{D}$**

In getallen:

$2 : 3 = 4 : 6 \rightarrow 2 \times 6 = 3 \times 4$ dus $12 = 12$

Omgekeerd, als:

$12 = 12 \rightarrow 2 : 3 = 4 : 6$ of $2 : 4 = 3 : 6$, want **$2 \times 6 = 4 \times 3 = 12$**

We kunnen nu dus lekker goochelen met cijfers en letters en dat is precies wat geleerden zoals Newton, Lorentz, Einstein, Planck en anderen gedaan hebben, en zo tot opzienbarende conclusies gekomen zijn. Maar als je bijvoorbeeld de formules van Heisenberg, Schrödinger, de Broglie ziet, ja dat is een heel ander verhaal, waar mijn zoektocht me wel langs heeft geleid, maar waar ik me in dit “boek” niet aan waag! “KISS”: (Keep It Simple, Stupid!).

Nog één onderwerpje over de simpele wiskunde zal ik toch ook maar aanstippen: de “merkwaardige producten” (waar ik mezelf trouwens ook toe reken…..).

“Merkwaardige” producten.

Nou, zó merkwaardig zijn ze niet, het zijn eerder “producten” die wetenswaardig zijn, het beste zou zijn dat je ze uit je hoofd kent of leert.

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad \mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Er is verder weinig meer over te zeggen, bewijzen is niet nodig, je moet gewoon even rekenen met letters.

$$\mathbf{(a + b)^2} = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$$
$$\mathbf{(a - b)^2} = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$$
$$\mathbf{(a + b)(a - b)} = a^2 - ab + ab - b^2 = \mathbf{a^2 - b^2}$$

Na deze, misschien wel volkomen onnodige inleiding tot de wiskunde, naar wat leukere, wiskundige onderwerpen, maar eerst nog wat over zeer grote en zeer kleine getallen!

Notatie van getallen

Op zoek in het heelal en in het atoom, ontmoeten we nogal eens zeer grote en zeer kleine getallen! In een eerder hoofdstuk is daar al eens over geschreven, dus nog even een korte opfrissing. Getallen met veel nullen boven of onder de streep kunnen het beste als “machten” geschreven worden.

- Zo wordt bijvoorbeeld 3 miljard of 3.000.000.000 ook geschreven als:

$$\mathbf{3 \times 10^{9}}$$

- Een breuk als 4 biljoenste of 4/ 1.000.000.000.000 kan je schrijven als:

$$\mathbf{4 \times 10^{-12}}$$

Bij vermenigvuldigen of delen van zeer grote getallen, die op deze wijze geschreven zijn, kunnen de exponenten eenvoudig worden opgeteld, respectievelijk van elkaar afgetrokken worden. Een paar eenvoudige voorbeelden

- $\mathbf{10^{9} \times 10^{15} = 10^{24}}$ en $\mathbf{10^{-8} \times 10^{14} = 10^{6}}$
- $\mathbf{10^{23} : 10^{15} = 10^{8}}$ en $\mathbf{10^{12} : 10^{-7} = 10^{19}}$

Kegelsneden

Nu een heel ander onderwerp namelijk de “kegelsneden”! “Kegelsneden”? Ja, inderdaad, ze zijn al heel oud, de oude Grieken stoeiden een paar duizend jaar geleden al met “kegels” waardoor ze vlakken lieten “snijden” en zo kregen ze “kegelsneden”. Zo ontdekten ze allerlei bekende en minder bekende “krommes”, die wiskundige betekenis hebben.

Neem je een rechte kegel en doorsnijd je die met een horizontaal vlak, dan krijg je een cirkel, maar zet je nu dat vlak *schuin* dan krijg je een “ellips”.

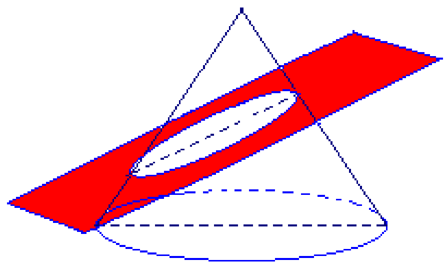


Fig.19.7 “Ellips”

Stellen we het vlak nog *schuiner* dan krijgen we een “parabool”. En snijdt een verticaal vlak door twee kegels op elkaar dan kunnen we een “hyperbool” verkrijgen, een dubbele curve, die dus uit 2 “sneden” bestaat.

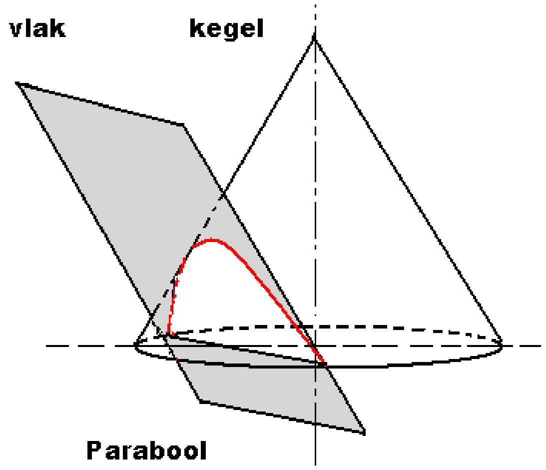


Fig. 19.8 “Parabool”

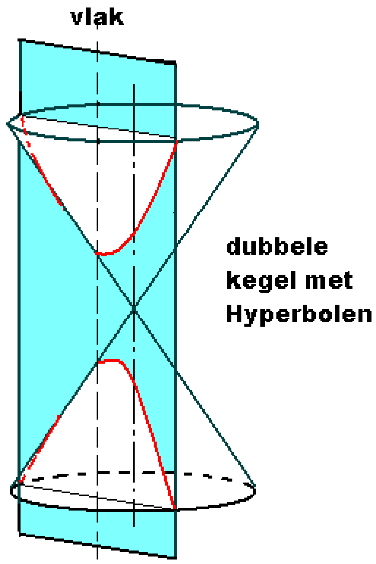
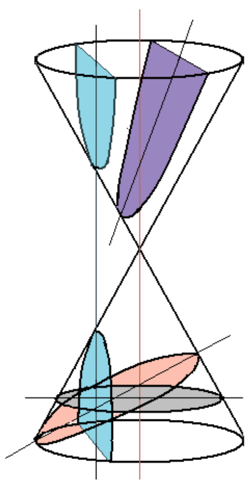


Fig. 19.9 “Hyperbool

Fig. 19.10 Kegelsneden



De geleerde Grieken zoals Archimedes, Euclides en anderen begonnen deze kegels (Grieks **konus**, meervoud **koni**) al vroeg te bestuderen, maar het was “Apollonius” uit de stad Pergamom in het huidige Turkije die er een boek over schreef: de “Konika”. Van hem zijn de woorden “ellips”, “parabool” en “hyperbool”, die achtereenvolgens de “te kort schietende”, de “aangepaste, overeenstemmende” en de “overtreffende, overschietende” (kromme) betekenen.

In het Grieks:	ελλειψις	“elleipsis
	παραβολη	“parabole”
	υπερβολη	“yperbole”

Maar…wat heb je aan die dingen en hoe verkrijgen we zulke “krommen” of “curven”? Tja, met deze kromme lijnen, “curven” of in ’t algemeen: ”grafieken”, kan je met (daar heb je ze weer) “formules” zichtbaar maken!

Een grafiek kan vaak zeer verhelderend werken en …., als je een eenvoudige "formule" neemt, dan is dat "zichtbaar" maken eigenlijk helemaal niet zo moeilijk.

Waar ik het hier over heb moet eigenlijk voor iedereen gesneden (kegel)koek zijn, het zijn de beginlessen in wiskunde, maar "ze" hebben mij toendertijd nooit verteld dat die grafieken eigenlijk met de "kegelsneden" in het oude Griekenland begonnen zijn! En toch dateert dat boek "Konika", waarin Apollonius van Perga deze kegelsneden beschrijft, al van 225 vóór Christus! Nu snappen we ook het woord "conifeer", dat betekent "kegeldrager" en inderdaad dennen, sparren, thuya's, ze dragen allemaal "kegels": dennenappels, sparappels enz. Nu de kegelsneden, eerst:

De PARABOOL

De schuine kegelsnede die "parabool" genoemd wordt, verkrijgen we met de formule:

$$\mathbf{y = a\,x^2.}$$

Om een flinke "snede" te krijgen nemen we voor "**a**" een breuk, bijvoorbeeld: **a** = ¼ **.**
Dan wordt de formule dus:

$$\mathbf{y\ =\ 1/4\,x^2.}$$

We maken eerst een staatje, waarbij we de getallen: 0, 1, 2 t/m 8 (positief en negatief) voor "**x**" invullen en dan "**y**" uitrekenen. Voorbeeld: als **x** = 2 dan is **y** = 1/4 x ^{2} dus 1/4 x 4 = 1.
Hier komt het staatje:

x	**y**	**x**	**y**
0	**0**	**0**	**0**
-1	**1/4**	**+1**	**+1/4**
-2	**1**	**+2**	**+1**
-3	**2 1/4**	**+3**	**+ 2 1/4**
-4	**4**	**+4**	**+ 4**
-5	**6 1/4**	**+5**	**+ 6 1/4**
-6	**9**	**+6**	**+ 9**
-7	**12 1/4**	**+7**	**+ 12 1/4**
-8	**16**	**+8**	**+ 16** .

We tekenen nu eerst een "dradenkruis". Men noemt de horizontale as de **"x-as".** De verticale as heet de "**y-as**". Vanaf het snijpunt **"0"** naar onder en naar links is alles negatief, naar boven en naar rechts is alles positief. Nu zetten we de getallen van het staatje voor **x** en **y** uit in het dradenkruis. De y-waarden zijn allen positief, de x-waarden positief en negatief. De curve komt daardoor boven de x-as, maar links en rechts van de y-as te liggen. Dan moeten we een "vloeiende"lijn door de gevonden punten trekken en krijgen we zo de "kegelsnede", die **parabool** genoemd wordt!

Ik herinner me nog goed dat vele leerlingen grote moeite hadden om zo'n vloeiende lijn door de punten te tekenen!

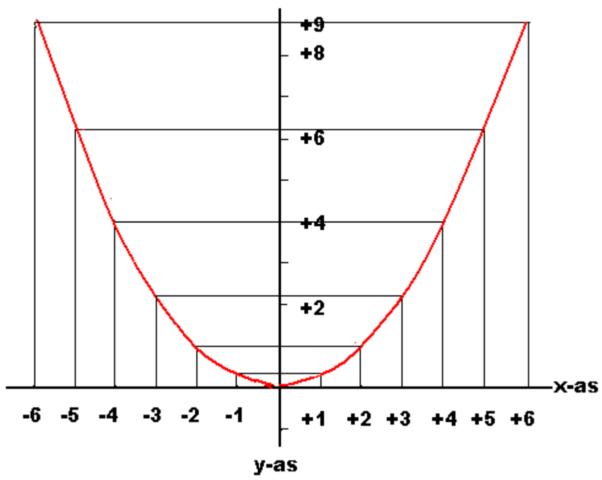


Fig. 19.11 de **PARABOOL**

Ik niet, maar heb wél enige moeite om (met het programma “paint”) een vloeiende curve met de “cursor” op het computerscherm te tekenen! We vervolgen nu met:

De HYPERBOOL.

Om deze (dubbele) kegelsnede te verkrijgen gaan we uit van de formule:

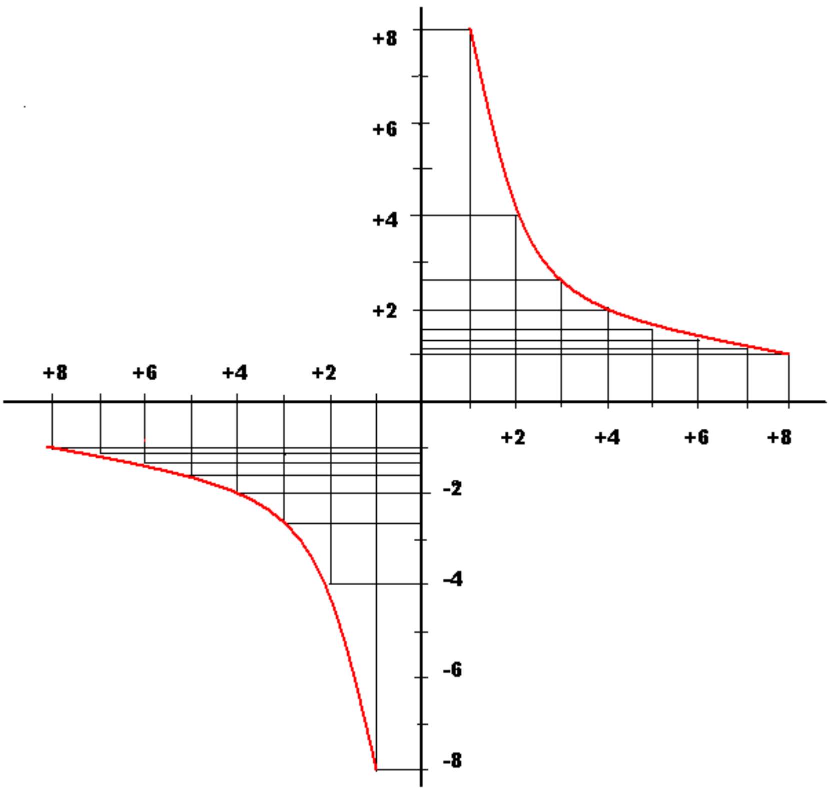
y = a / x

Om een “fatsoenlijke” hyperbool te krijgen, nemen we voor **“a”** de waarde **8.**

y = a / x wordt dan **y = 8 / x**

We nemen weer de getallen 1, 2, 3,4…., maar nu voor **y** en rekenen daarvoor **x** uit.

y	x	y	x
-8	**-1**	**+8**	**+1**
-7	**-1** 1/7	+7	**+1** 1/7
-6	**-1** 1/3	+6	**+1** 1/3
-5	**-1,6**	**+5**	**+1,6**
-4	**-2**	**+4**	**+2**
-3	**-2** 2/3	+3	**+2** 2/3
-2	**-4**	**+2**	**+4**
-1	**-8**	**+1**	**+8**



Als we deze getallen vervolgens uitzetten in het vlak met de **x** en de **y**-as, krijgen we opnieuw een aantal punten, aan weerszijden van de **x** en **y**-as. Als we die punten met elkaar verbinden krijgen we nu dus twéé “curven”:

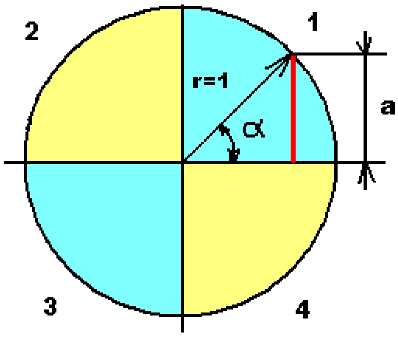
de ”**HYPERBOOL”**

Fig. 19.12

De andere kegelsneden, cirkel en ellips “vallen buiten het bestek van dit boek”. Nee hoor, maar ik vind de parabool en hyperbool wel genoeg.
Maar eerst wel nog even een andere curve, de “sinusoïde”!

SINUSOÏDE

Nu we toch met "krommes" bezig zijn, we hebben ook nog de "sinusoïde", de zichtbaar gemaakte "sinus"! De "sinus" is in hoofdstuk 17 bij de breking van licht al eens ter sprake gekomen. Het is een verhoudingsgetal dat bij een bepaalde hoek hoort. De sinus van een hoek kan je met behulp van een tabel (of met een zakrekenmachientje) te weten komen (evenals de "cosinus", de "tangens" en de "cotangens"). Ten overvloede: in een rechthoekige driehoek is de sinus altijd: "de overstaande zijde gedeeld door de schuine zijde".



Nemen we nu eens een cirkel met straal **r = 1**. We verdelen deze cirkel in vier "kwadranten": 1, 2, 3 en 4, door een horizontale (x-)as en een verticale (y-)as. Bekijken we nu het lijnstuk **a** in kwadrant 1 dan is de sinus van hoek **α** het lijnstuk **a** gedeeld door de straal **r,** dus:

sinus α = a / r = a (want r = 1)

Fig. 19.13 Cirkel en sinus (rode lijn)

Zoals bij alle coördinatenstelsels (met x-as en y-as) zeggen we ook hier dat de verticale as boven het middelpunt positief en eronder negatief is en de x-as rechts positief en links negatief. Draaien we nu de straal linksom dan is **a** (uit fig. 19.6) in kwadrant 1 en 2 positief en daarna in kwadrant 3 en 4 negatief!

Hoe tekenen we nu een sinusoïde? We verdelen de cirkel eerst in 12 sectoren (van 30^0**)** en de verlengde x-as eveneens in 12 gelijke delen. Door nu de (veranderende) afstand "a", boven en onder de x-as voor alle sectoren uit te zetten, krijgen we 12 punten, die, met elkaar verbonden een **"sinusoïde"** vormen!

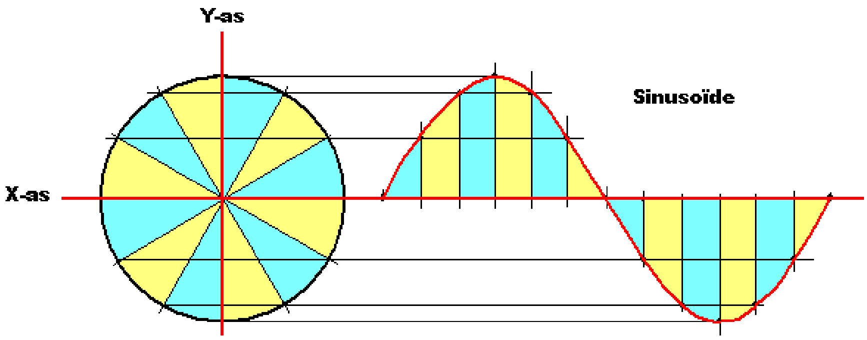


Fig 19.14 de "**Sinusoïde**"

We hebben dus eigenlijk steeds lijnstuk "a" uit de vorige figuur (de sinus van de veranderende hoek "α") uitgezet naast de cirkel en zo de sinus zichtbaar gemaakt. Dit type golflijn komt zeer veel voor in de "wereld van golven". "Onze" wisselstroom bijvoorbeeld golft op deze wijze. Deze sinuslijn geeft daarvan één periode weer. Wisselstroom wisselt in Europa 50 maal (50 Hertz of 50 periodes) per seconde en gaat per periode inderdaad van positief via nul naar negatief en dan via negatief terug naar nul!

Gelijkstroom zouden we als een rechte lijn boven de x-as weer kunnen geven en, stellen we de "stroom" elektronen voor als water, dan kunnen we gelijkstroom als een continue stroom water in een buis (kabel) zien. Dat water kan bijvoorbeeld een "waterrad"

(elektromotor) aandrijven. Maar wisselstroom? Dat lijkt meer op water dat snel heen en weer vibreert in een buis en daarin bijvoorbeeld een membraam heen en weer beweegt.
Waarom zijn we eigenlijk van die rustige gelijkstroom naar die zenuwachtige wisselstroom overgestapt? Eigenlijk alleen maar omdat gelijkstroom niet getransformeerd kan worden! Wisselstroom wél. En wat is dan draaistroom (of 3 fasenstroom)? Dat zijn 3 wisselstromen of "fasen", die 120^0 ten opzichte van elkaar "verschoven" zijn. Die stromen lopen dus achter elkaar door de leiding. In huis hebben we meestal maar één van deze fasen (plus de "nul"), tenzij je "krachtstroom" hebt.

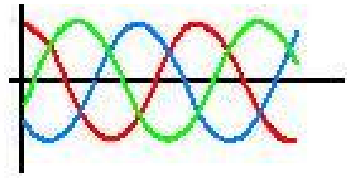


Fig. 19.15 "Draaistroom

Nog een leuk voorbeeldje van "standaardisering" in de wereld: In Europa hebben we 50 Hertz, maar in heel het werelddeel Amerika wisselt de stroom 60 maal per seconde. En in de rest van de wereld? Hangt van het land af. En ook de spanning van 3 fasenstroom is overal anders, 380V in Europa, dan heb je nog 440V en 550V etc. Alle moderne schepen waar ik op gevaren heb, hadden 60 Hertz, leuk voor je taperecorder, die liep dus te snel! En die vooroorlogse tankertjes, die hadden…. gelijkstroom. Ik spreek steeds van "stroom", maar de "spanning" wisselt ook als een sinus, soms "verschoven" t.o.v. de stroom. De spanning (het voltage) in Europa is meestal 220 à 230 Volt, maar in Amerika? 110 Volt! En in Brazilië? Daar heeft men beide in huis, dus moet je verrekt goed uitkijken in welk stopcontact (officieel "wandcontactdoos") je de stekker steekt…. En aan boord? 110 à 115 Volt!

"Fractals"

Een andere methode om wiskundige formules zichtbaar te maken zijn de zogenaamde "fractals"! Wat zijn nu weer "fractals"? Dat zijn *"meetkundige figuren die de eigenschap hebben dat bepaalde onderdelen van de figuur zich steeds verder herhalen, maar dan op steeds kleinere schaal"*, zoals men het ooit stelde. In principe kan dit herhalen oneindig ver gaan, maar ja, dat kunnen wij ten eerste niet zien en we kunnen niet oneindig ver verkleinen. Denk maar aan de cacaobus van Droste, je weet wel, die bus waarop een zuster staat met een dienblad waarop een bus cacao met daarop de afbeelding van een zuster met een dienblad waarop een bus cacao staat met daarop………. enzovoort. Theoretisch gaat het altijd maar door, het zou oneindig door moeten gaan. Helaas, al snel zie je niets meer! Zou het "oneindige" dan toch niet zo ver weg liggen? Jazeker, maar onze zintuigen werken niet oneindig door….Nog een methode om in het oneindige te kijken is: met twee spiegels tegenover elkaar. Een kennis heeft z'n toiletruimte op ooghoogte van spiegeltegels voorzien. Als je daarin kijkt, kan je jezelf tot in het oneindige zien. Maar…..helaas, ook daar kijk je echt niet zo ver, na enige tientallen beelden is alles vervaagd.

Fig. 19.16 Cacaobus van Droste

Dan hebben we ook nog de lengtebepaling van een willekeurige kustlijn. Beschouwen we de kustlijn van een bepaald land, dan heeft deze een bepaalde lengte, die bij de regering of de kaartenmakers wel precies bekend zal zijn. Maar…. hoe hebben ze die lengte gemeten? Als je een flink lang meetlint gebruikt zal de lengte korter zijn dan wanneer je elk bochtje en kronkeltje volgt, of dat je met een klein liniaaltje meet! Hoe korter de liniaal, hoe langer de kustlijn zal worden.

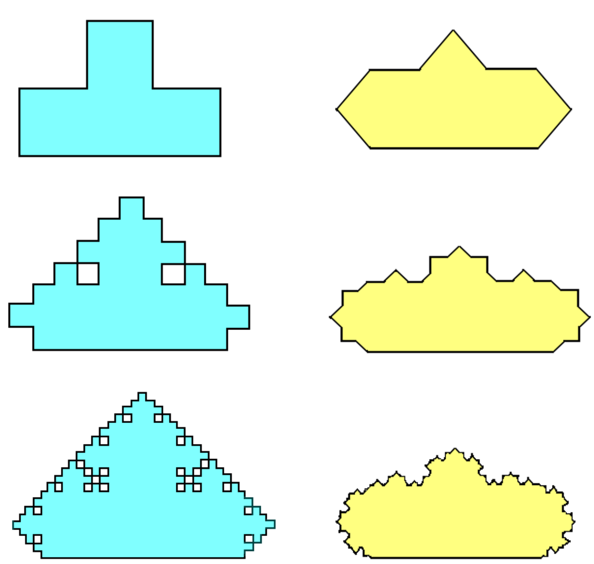


Fig. 19.17 “Kustlijnen”

Maar wat heeft dit alles met “fractals” te maken? Dat gaan we nu bekijken, maar eerst moeten we dan nog “even” het begrip “**itereren**” kennen.

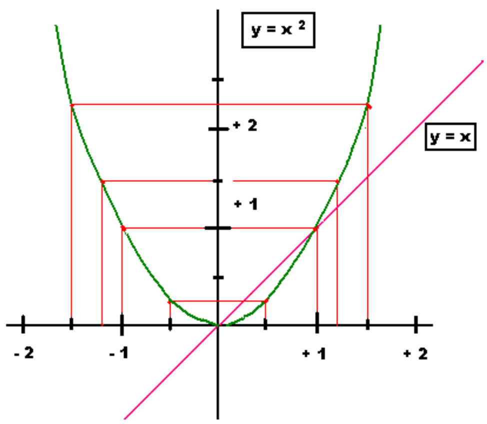
Itereren

Itereren is een “*wiskundige bewerking op een formule, waarbij de uitkomst steeds opnieuw in de formule wordt ingevoerd*”, zeggen de wiskundigen.

Nemen we de formule: “$\mathbf{y = x^2}$“, dan geeft die een “parabool”, zoals we nu weten. Als we nu $\mathbf{x} = 1$ nemen dan is **y** ook gelijk aan 1, daarmee heeft “itereren” dus geen zin! Maar….nemen we nu $\mathbf{x = 2}$**,** dan wordt **y** gelijk aan $\mathbf{2}^2 = 4$ en kunnen we gaan “itereren”, want dan wordt de volgende **y** gelijk aan $4^2 = 16$, 16^2 wordt 256 en zo voort! We krijgen dan de reeks: 2, 4, 16, 256, 65536, 4294967296, ………al snel zeer grote getallen.
Deze waarden kunnen we maar beter niet proberen grafisch weer te geven: veel te groot veld nodig. Maar nemen we nu voor **x** een waarde tussen 1 en 2, dan kunnen we wél “itereren”. Eerst maar de parabool voor “$\mathbf{y = x^2}$” tekenen, dus eerst weer even een lijstje maken:

Voor:	**x is**	**y**
	0	**0**
	± 0,5	**0,25**
	± 1	**1**
	± 1,2	**1,44**
	± 1,5	**2,25**

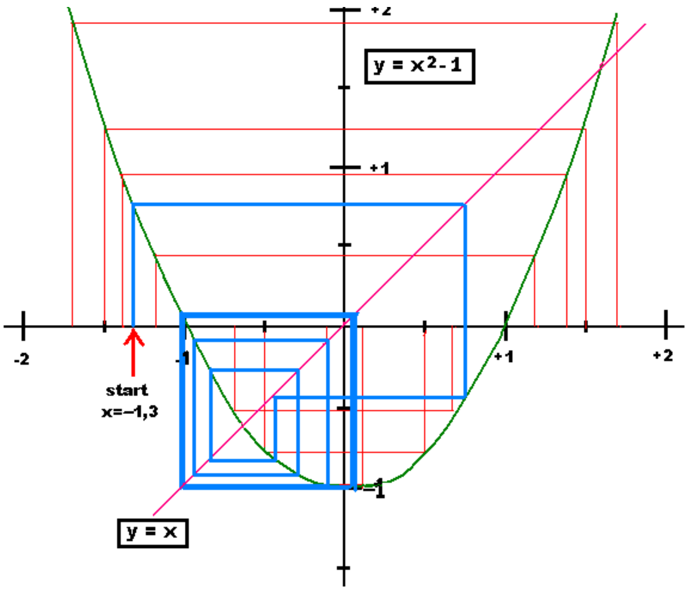
Fig. 19.18 $\mathbf{y = x^2}$ en $\mathbf{y = x}$



Getallen “plotten” en de gevonden punten verbinden, we krijgen dan de parabool $\mathbf{y = x^2}$. Hierin is ook de lijn “$\mathbf{y = x}$ “ getekend. Voor “$\mathbf{y = x}$**”**, is de grafische voorstelling namelijk logischerwijze een lijn die 45^0 met de x-as en de y-as maakt en door het nulpunt loopt, want elk punt van deze lijn $\mathbf{y = x}$ geeft dan altijd dezelfde waarde voor **x** en voor **y**.

Nu gaan we een parabool tekenen die niet in het 0-punt begint. Dit doen we door iets bij $\mathbf{x}^2$ op te tellen (of af te trekken). De formule $\mathbf{y} = \mathbf{x}^2$ wordt dus $\mathbf{y} = \mathbf{x}^2 + \mathbf{a}$.
Laten we a = -1 nemen. We krijgen dan “$\mathbf{y} = \mathbf{x}^2 \mathbf{-1}$” en het lijstje wordt:

x	**is**	**y**
0		**-1**
± 0,5		**-0,75**
± 1		**0**
± 1,5		**1,25**
± 2		**3**



We tekenen nu de parabool $\mathbf{y} = \mathbf{x}^2 \mathbf{-1}$ én de lijn **y = x** en dan kunnen we in deze figuur gaan “itereren”! Dat gaat zo:
We starten met een (kleine) waarde voor **x** (op de x-as) en gaan verticaal naar de paraboolcurve.
We hebben dan de waarde voor **y**.
Om nu te “itereren” moet deze waarde dus ook voor **x** gelden.

Fig. 19.19 Parabool met “iteratie”

Dit doen we door (horizontaal) naar de lijn “**y = x**” te gaan en dan weer (verticaal omlaag) naar de paraboolcurve. Dat is dan de nieuwe waarde voor **y**.
Nu opnieuw naar de **y = x** lijn, dan (omlaag) naar de parabool en zo voort. Volg in figuur 19.18 de blauwe lijn vanaf de **start**. De startwaarde voor **x** is – 1, 3. Volgen we de (blauwe) iteratielijn ver genoeg, dan zien we dat deze uiteindelijk in het vierkant: -1,-1 blijft “vierkanten” (cirkelen kunnen we hier niet zeggen).

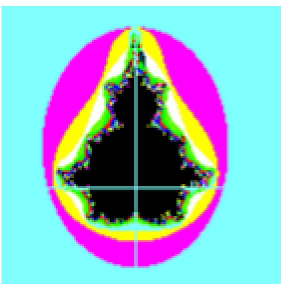
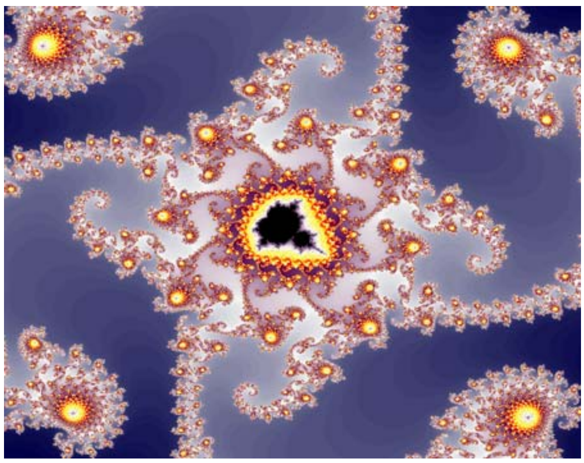


Fig.19.19 “het Appelmannetje”

Zouden we als startwaarde voor **x** een waarde groter dan 2 nemen, dan zouden we snel van het veld aflopen, de iteratie loopt dan naar oneindig! Met de blauwe lijn hebben we nu dus een heel eenvoudige “fractal verkregen”, geen erg mooie moet ik toegeven.
Één van de bekendste “fractals” die wel “mooi” is, is het hier afgebeelde “appelmannetje”. Deze wordt door itereren in een parabool verkregen!

Fig.19.20 Fractal (met appelmannetje)



Heel mooie fractals krijg je met “complexe” startwaardes. Over complexe getallen ga ik láter wel wat vertellen, maar fractals met complexe getallen als startwaardes? Hier liever niet! Uitvoerige en “mooiere” fractals zijn volop te verkrijgen. Ze zijn ook zelf te maken, maar dan heb je een computer en een programma nodig (bijvoorbeeld “fractint”).

De natuur werkt óók met fractals, heel vaak zelfs. De natuur maakt vele vormen die zich steeds verder en kleiner herhalen. IJskristallen, boomtakken, de hiernaast afgebeelde "torentjesbloemkool" vormen natuurlijke fractals, waarbij de natuur zelf aan 't "itereren" (lees "groeien") is geslagen.

Fig. 19.21 Torentjesbloemkool

De "Gulden snede"

Eenvoudige wiskunde kan toch wel leuk en interessant zijn. Een aardig en interessant onderwerp (in ieder geval voor mij) is bijvoorbeeld: "**de gulden snede**". Nee, die heeft niks met seks te maken, maar is een bepaalde verhouding, die in de kunst en de architectuur, (vooral in de renaissancetijd) veel gebruikt werd en wordt.

Deze verhouding heeft mij al heel lang gefascineerd, onder andere omdat hij in de natuur overal voorkomt: in de mens, in slakkenhuizen, in planten (varens) en nog veel meer. Zo is deze verhouding bijvoorbeeld te vinden in de beroemde tekening van de "mens van Vetruvius" van Leonardo da Vinci. Hoe luidt die verhouding dan wel? Nou, hier komt hij:

1 : 1,618 Je kunt ook schrijven: $\mathbf{1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ Is dat alles?

Ja, dat is alles. En…. omdat deze getallen nogal lastig zijn, gebruikt men ook vaak:

5 : 8

Deze verhouding is niet precies, maar een benadering van de eerste. De gulden snede is een verhouding, die "harmonisch" zou zijn en wordt daarom toegepast in de architectuur voor afmetingen van ramen, kamers, in de kunst voor schilderijlijsten (lengte en breedte) enzovoort. Maar….. hoe komen we nu aan deze verhouding? Deze verhouding is afgeleid van de volgende verhouding van twee "grootheden":

Kleinste getal : Grootste getal = Grootste getal : (Kleinste + Grootste getal)

$$\mathbf{K : G = G : (K + G)}$$

Daar moeten de eerder genoemde getallen dus aan voldoen! Dat zullen we zo bekijken.

Maar eerst die verhouding zelf. Bekijk de volgende tekening van Leonardo da Vinci.

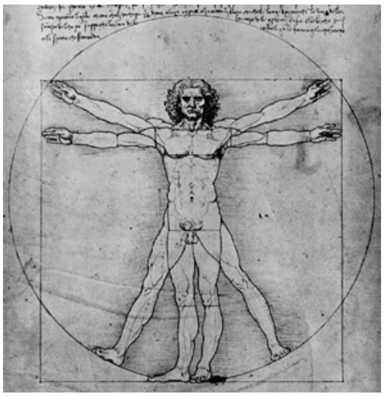


Fig. 19.22 De man van Vitruvius van Da Vinci.

Als je deze beroemde tekening goed bestudeert, is deze verhouding als volgt te vinden (volgens Leonardo):

"De verhouding tussen de afstand hoofd tot middel en middel tot voeten is gelijk aan de verhouding tussen de afstand van middel tot voeten en de gehele lengte van de mens".

Deze verhouding zou voor ieder (normaal?) mens gelden en werd een soort voorbeeld verhouding, die dus "harmonisch" zou zijn. In het Latijn heet deze verhouding dan ook: "Sectio Aurea" wat dus "gulden snede" betekent. Hij wordt ook "Proportio Divina", de "goddelijke verhouding" en ook wel de "gulden rede" genoemd. Nu gaan we bekijken of de genoemde getallen wel aan deze "gouden verhouding":
K : G = G : (K + G) voldoen en vervolgens hoe we aan die getallen komen. We schrijven de verhouding in getallen op en dan moet dus het volgende waar zijn:

1 : 1,618 = 1,618 : (1 + 1,618) = 1,618 : 2,618

Hoe controleren we dit? Door "kruiselings te vermenigvuldigen"! Hoe ging dat ook weer?

Als **a : b = c : d,** dan is **a x d = b x c** of **ad = bc**.

Dus: **1 x 2,618** ---moet (liefst redelijk) gelijk zijn aan: **1,618 x 1,618 (= 2,617924)**
en ja: **2,618** is inderdaad bijna gelijk aan **2,617924**

Nu die "makkelijke" getallen **5** en **8**:

5 : 8 moet dus ongeveer gelijk zijn aan **8 : (5 + 8)** en dat is **8 : 13**

Kruiselings vermenigvuldigen:

5 x 13 = 65, 8 x 8 = 64, niet gelijk maar redelijk bruikbaar!

Ook **2 : 3** benadert de "gulden verhouding", kijk maar:

2 : 3 = 3 : (2 + 3) = 3 : 5 dus **2 x 5** moet in de buurt liggen van **3 x 3 (10 en 9)**!

Maar de vraag was: <u>hoe komen we nu aan die getallen</u> **(1 en 1,618)**? Wel nu, als volgt:

We hebben: **K : G = G : (K+G).**

Stel het kleinste getal "**K**" op 1 en het grootste getal "**G**" op X, dan moet dus volgens de gulden snede gelden:

$1 : X = X : (1 + X)$, kruiselings vermenigvuldigen geeft dan:
$1 \times (1 + X) = X \times X = X^2$ dus kunnen we schrijven:

$X^2 = X + 1$ waaruit volgt: $\underline{\mathbf{X^2 - X - 1 = 0}}$

Nu is **"$X^2 - X - 1 = 0$"** een "vierkantsvergelijking", waar we met een beetje algebraïsche kennis **X** uit kunnen oplossen, toch?
Als we de vierkantsvergelijking: "**$ax^2 + bx + c = 0$**" hebben, dan geldt namelijk nog steeds de volgende formule om "**x**" **(**twee mogelijkheden) op te lossen:

$$\mathbf{x_{1,2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ en hiermee kunnen we $\mathbf{x_{1,2}}$ berekenen:

Nu hebben we: $\mathbf{x^2 - x - 1 = 0}$, Dan is dus:

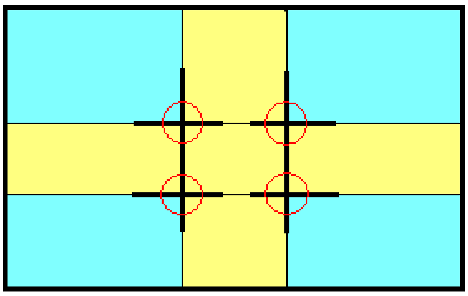
$$\mathbf{x_1} = \frac{1 + \sqrt{(1^2 + 4.1.1)}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$ (x_2 = negatief en onbruikbaar)

De wortel uit 5 = $\sqrt{5}$ = 2,23606797749, dus kunnen we schrijven:

$$\mathbf{x_1} = \frac{1 + 2{,}236}{2} = 0{,}5 + \frac{2{,}236}{2} = 0{,}5 + 1{,}118 = \underline{1{,}618}$$

<u>1 : x</u> <u>is dus gelijk aan:</u> **<u>1 : 1,618 !</u>**

Welnu, dat weten we ook weer, maar wat kunnen we er mee? Nou, je kunt bijvoorbeeld, bij het ontwerpen van een huis, deze verhouding gebruiken voor de indeling, voor de maten van kamers, raamkozijnen en dergelijke of ook bij het ontwerpen van kasten, tafels en andere meubels.



Gulden rechthoek met 4 "harmonische" punten

Als je van schilderijen houdt: je kunt zien dat vele schilders bij hun schilderijen deze "gouden verhouding" toegepast hebben. De verhouding van lengte en breedte voldoet nogal eens aan de gulden snede, maar vooral vind je de verhouding terug in het schilderij zelf. Er is namelijk een theorie die zegt dat, om een harmonisch schilderij te maken, je gebruik moet maken van (een van) de vier harmonische" punten in het vlak. En deze vier punten in een rechthoek worden bepaald met de gulden snede.

Fig. 19. 23 Harmonische punten

Bij de opzet van een schilderij zou je dus bij voorkeur de meest in ’t oog vallende zaken op één van deze plaatsen moeten aangeven. Dus nooit een vaas bloemen in ’t midden van een schilderij. En in een landschap nooit de horizon in ’t midden zetten, maar een stuk onder of boven het midden. Maak gebruik van de “gouden verhouding”. Ook bij het foto’s nemen zou je op deze regels moeten letten om “harmonische” foto’s te krijgen.
Bij deze aquarel heb ik me (onbewust?) aan de “gulden” regel gehouden.

Fig. 19.24 “Bergse hei”

Onze eigen Nederlandse schilder Piet Mondriaan trachtte altijd “harmonieuze” schilderijen te maken. Ook hij gebruikte de gulden verhouding. Ooit wonende in de “Pieter Mondriaanstraat”, heb ik met behulp van deze verhouding een variant op Mondriaans typische schildertrant gemaakt en onze garagedeur van deze afbeelding voorzien. Die (kantel)deur zelf had de “gulden verhouding” niet, maar de maten van het blauwe vlak ten opzichte van de hele deur wel. Als je een beetje gevoel voor harmonie hebt, en ik denk dat veel mensen daar een aangeboren gevoel voor hebben, gebruik je die verhouding misschien wel automatisch!

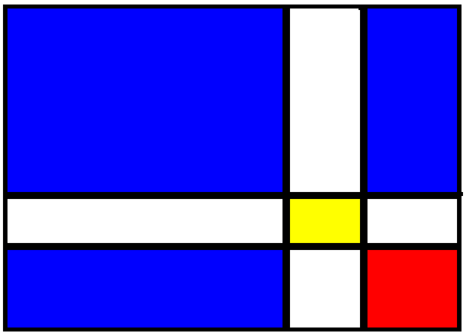


Fig. 19.25 “Mondriaan”achtige garagedeur

Er bestaat trouwens ook een “gulden driehoek” en deze zit verstopt in een regelmatige vijfhoek, het zogenaamde “pentagon”. De cirkel is verdeeld in vijf hoeken van 360 : 5 = 72 graden. De gulden driehoek heeft dus een tophoek van 0,5 x 72 = 36 graden.

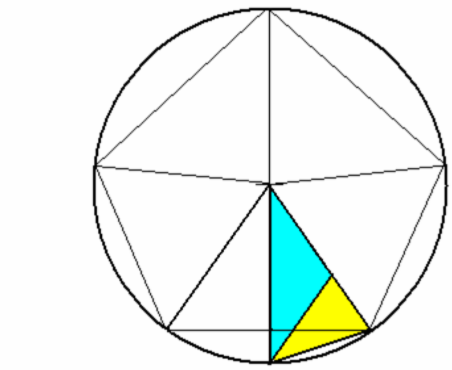


Fig.19.26 Cirkel met vijfhoek met daarin de “gulden driehoek”

Bekijken we alleen de “gulden” driehoek ABC, met daarin de “bissectrice” (deellijn) van hoek A, dan zien we dat Δ BDA gelijkvormig is aan Δ ABC en dus is:
BD : AB = AB : (BD + DC).
Stellen we lijnstuk BD = 1 (gelijk aan één dus) en AB = x, dan is”

$$\mathbf{1 : x = x : (1 + x) \rightarrow x^2 = 1 + x \rightarrow x^2 - x - 1 = 0}$$

Hé, die kennen we! Ja, en de uitkomst kennen we ook: **x= 1,618** en de verhouding **1 : 1,618** zou dus oneindig door kunnen gaan, kijk maar naar de figuur.

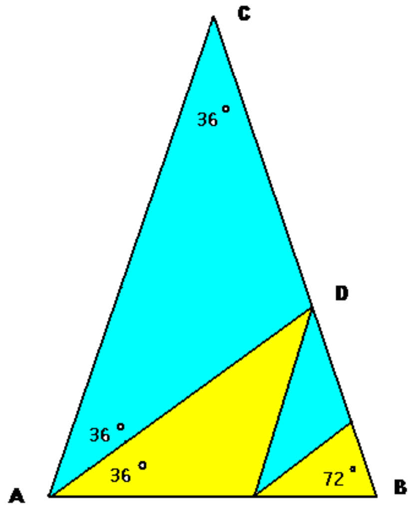
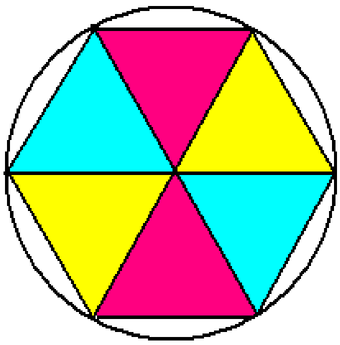


Fig. 19.27 “de gulden driehoek”

Pentagon en Hexagon

Ik weet niet of dit met het hiervoor besprokene te maken heeft, maar in de natuur hebben heel veel bloemen 5 bloemblaadjes om het hartje! Ook zijn er nogal wat bloemen met 20 bloemblaadjes, een veelvoud van 5! Oké, ik weet dat er ook bloemen met 6 bloemblaadjes in de kelk zijn, maar… veel minder vaak. Zelf zou ik ’t anders doen. Ik zou bloemen “scheppen” met zes blaadjes want een zeshoek (“hexagon”) is veel makkelijker te construeren dan een vijfhoek, maar ja, ik ben geen schepper! Bij een zeshoek pas je gewoon de straal zes keer af op de omtrek en als je dat precies doet, dan komt dat exact uit, want de zijden van een zeskant (“hexagon”) zijn gelijk aan de straal! Bij een vijfhoek (“pentagon”) moet je heel anders te werk gaan.



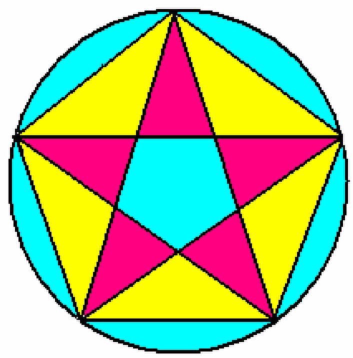


Fig. 19.28 “Hexagon” “Pentagon”

Deze “gulden snede”, die nu besproken is, misschien wordt het belang van deze “gouden verhouding” overdreven, maar doordat het dé natuurlijke verhouding is, is het voor mij en vele anderen toch wel een fascinerend onderwerp!

Vierkantsvergelijking

De berekening van de "gulden snede" ging via een "vierkantsvergelijking". Een dergelijke "tweedegraads" vergelijking (met "**x** kwadraat") oplossen is met genoemde formule voor $x_{1,2}$ een eenvoudige zaak. Voor een derdegraads vergelijking (met **x** tot de derde) wordt het al veel moeilijker en daarboven kan het alleen met omslachtige methodes of het lukt helemaal niet. Het enige wat je dan nog kan doen, denk ik, is de formule grafisch weergeven en dan maar kijken waar hij de x-as snijdt. Dat is een tijdrovend zaakje, maar het zal nu met een computer wel sneller kunnen.

Maar… hoe kwamen we ook al weer aan die formule voor de oplossing van een vierkantsvergelijking? Als volgt: (Lezers die niet van wiskunde houden en ingewijden, kunnen ook nu weer beter afhaken als ze al niet weg zijn. Sla ook maar over als dit gesneden koek voor je is…!) We beginnen met de algemene vorm van de vierkantsvergelijking en krijgen dan:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

We vermenigvuldigen alles met 4a:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 4a.0 = 0$$

We voegen $b^2 - b^2$ (= 0) toe (dat mag, omdat dit 0 is):

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - b^2 = 0$$

We brengen de termen **4ac** en $- b^2$ rechts van het = teken, + en – veranderen dan.

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

We zien nu een "merkwaardig product": $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ dus krijgen we:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Trek de wortel uit beide termen (dat mag):

$$2ax + b = \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}$$

Hieruit volgt:

$$2ax + b = \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)} \rightarrow 2ax = - b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Dit was dus wiskunde voor "dummy's"! Of toch niet? Deze afleiding is vrij eenvoudig. Maar….. we hebben wel een voorsprong, wij kenden de formule voor de oplossing al en konden er dus naar toe werken. Maar …. hoe zouden die Mesapotamiërs en al die andere lui dat vroeger gedaan hebben? En….. met derde- en meergraadsvergelijkingen hebben we een heel ander verhaal! En verder, wat hebben we eraan? Nou ja we hebben de gulden snede ermee berekend.

Zwaartekrachtformule

Hier dan nog een voorbeeld van een berekening waar de vierkantsvergelijking in voorkomt. Ik heb in een eerder hoofdstuk al eens flink gerekend met Newton's formule voor de zwaartekracht. Daarbij kwam ook ter sprake dat niet alleen de aarde aan ons trekt, maar ook de maan en de zon. Als ik nu van de aarde naar de maan zou reizen, zou ik eerst voornamelijk onder invloed van de aardse zwaartekracht staan en later in de invloed van de maan terechtkomen. Er moet dus een punt zijn waar de aardse en de "maanse" invloed gelijk zijn! Waar ligt dat punt? Daarvoor hebben we de hiervoor genoemde formule nodig! Kijk maar mee!

We gaan uit van de volgende gegevens (ik neem afgeronde getallen):

- afstand aarde – maan: ± 350.000 km of $3{,}5 \times 10^5$ km = **D**
- massa aarde: 600×10^{22} kg = **A**
- massa maan: $7{,}35 \times 10^{22}$ kg = **M**
- massa Jacob: 90 kg = **J**
- Gravitatiefactor $6{,}673 \times 10^{-11}$ = **G**

De zwaartekrachtformule van Newton luidt:

$$\mathbf{F = G \times \frac{m_1 \,.\, m_2}{r^2}}$$

Hierin is dus **F** de kracht, **G** de gravitatiefactor, $\mathbf{m_1}$ en $\mathbf{m_2}$ de betreffende massa's en **r** de afstand tussen de massa's! We noemen het te vinden punt: **P**.
Als we nu het punt **P**, waarop de maan net zo hard aan mij trekt als de aarde, stellen op **x** kilometer van de maan dan is de afstand van dat punt tot de aarde dus (350.000 – **x)** km.
Waar zou dit punt **P** liggen? Logisch gedacht moet dat tamelijk dicht bij de maan liggen, want die is veel kleiner dan de aarde! Daardoor wegen we op de maan ongeveer een zesde van ons gewicht op aarde. De vraag wordt nu: "Op hoeveel kilometer van de maan heffen de twee zwaartekrachten elkaar op?" Eerst eens kijken met hoeveel kracht de aarde en de maan aan mij trekken.
We stellen de massa van de maan op **M** en die van de aarde op **A.** Massa Jacob is **J.**

De maan trekt met $F_1 = \mathbf{\frac{G \times M \times J}{x^2}}$ en de aarde met $F_2 = \mathbf{\frac{G \times A \times J}{(350.000 - x)^2}}$

In het punt dat wij zoeken zijn deze krachten F_1 en F_2 gelijk, dus is:

$$\mathbf{\frac{G \times M \times J}{x^2} = \frac{G \times A \times J}{(350.000 - x)^2}}$$

Kruiselings vermenigvuldigen geeft:

$$\mathbf{(G \times M \times J) \,.\, (350.000 - x)^2 = (G \times A \times J) \,.\, x^2}$$

350.000 kunnen we schrijven als $3{,}5 \times 10^5$! In beide termen hebben we **G** en **J**, <u>die kunnen we dus wegstrepen</u> (er verandert daardoor niets).

We krijgen nu:

$$\mathbf{M}\,(3{,}5.10^5 - \mathbf{x})^2 = \mathbf{A}.\mathbf{x}^2$$

In: $(3{,}5.10^5 - \mathbf{x})^2$ zien we het "merkwaardige product" $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ dus kunnen we nu schrijven:

$$\mathbf{M}\,(12{,}25.\,10^{10} - 2\,.\,3{,}5.\,\mathbf{x}\,.\,10^5 + x^2) = \mathbf{A}\mathbf{x}^2$$ Haakjes wegwerken:

$$\mathbf{M}\,.12{,}25.\,10^{10} - 2\mathbf{M}\mathbf{x}\,.\,3{,}5\,.\,10^5 + M.x^2 = \mathbf{A}\mathbf{x}^2$$

We brengen alles naar één kant van het = teken:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^2 - \mathbf{M}.\mathbf{x}^2 - \mathbf{M}\,.12{,}25.\,10^{10} + 7\mathbf{M}\mathbf{x}\,.\,10^5 = 0$$

Nu maken we er een vierkantsvergelijking van:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{M})\,\mathbf{x}^2 + (7\mathbf{M}.\,10^5)\,\mathbf{x} - 12{,}25\,\mathbf{M}\,.\,10^{10} = 0$$

Daar hebben we eindelijk onze vierkantsvergelijking en A en M zijn bekend! Mijn massa is niet van belang (wat jammer nu!) **G** evenmin! De uitkomst geldt blijkbaar voor iedere willekeurige massa en is onafhankelijk van **G**.
Nu gaan we rekenen volgens:

$$\mathbf{x}_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \rightarrow$$ de positieve waarde voor x is:

$$x = \frac{-7\mathbf{M}.10^5 + \sqrt{\{49\mathbf{M}^2.\,10^{10} + 4(\mathbf{A} - \mathbf{M}).\,12{,}25\mathbf{M}.\,10^{10}\}}}{2.(\mathbf{A} - \mathbf{M})}$$

We kennen de waardes van **A** en **M**, vullen die in en krijgen dan:

$$x = \frac{-51{,}45.\,10^{27} + \sqrt{2647.\,10^{54} + 213443\,.\,10^{54}}}{1185{,}3\,.\,10^{22}}$$

$$x = \frac{-51{,}45.\,10^{27} + 464{,}85\,.\,10^{27}}{1185{,}3\,.\,10^{22}} = 0{,}34877\,.\,10^5 = 34877$$

Het punt P ligt dus op 34.877 km van de maan (of 316.123 km van de aarde). Daar is dus de aardse zwaartekracht gelijk aan die van de maan en daar heffen de beide (zwaarte)krachten elkaar dus op! Nu nog even hetzelfde met zon en aarde……… ga je gang!

Imaginaire en complexe getallen

Nu we toch bezig zijn, doen we meteen even de "imaginaire" en "complexe" getallen erbij. Op school leerde ik dat je uit een negatief getal geen wortel kan trekken, dat ging gewoon niet! Maar….. wortels uit negatieve getallen komen in berekeningen toch regelmatig voor. Later bleek dat je toch wat kon doen met die "onmogelijke wortels", sterker nog, er is een aparte wiskunde uit ontstaan, die van groot belang bleek voor de elektriciteitsleer en ook voor berekeningen over de "vierdimensionale wereld". Daar heeft een zekere "Minkovsky" flink aan gerekend. Maar… wat heb ík zelf nu toch met deze "imaginaire" en "complexe" getallen? Dat heeft te maken met een verhaaltje over een verborgen schatkist op een onbewoond eiland, dat ik ooit las.

Iemand had een heel oud document te pakken gekregen, waarop de coördinaten van een eiland met een verborgen schat stonden. Ook gaf het document aanwijzingen waar precies de schatkist begraven was! Enfin, de man huurde een schip, voer naar het eiland en begon te zoeken. In het document werd gesproken over een veld waarop een eik, een dennenboom en een galg zouden staan.

Op het eiland aangekomen bleek de beschrijving goed te kloppen. Hij vond al snel het veld, de eik en ook de dennenboom, maar… helaas, de galg was intussen verdwenen! Dit was natuurlijk een grote teleurstelling, maar hij was er nu toch en hij begon dus maar te graven, een beetje in 't wilde weg. Hij groef en groef, maar… helaas, zonder resultaat, hij vond de schat niet! Toch had hij de schat kunnen vinden, **als hij kennis had gehad van de wiskunde van de imaginaire en complexe getallen!**

Hoe kom ik aan dit verhaal? Dat heeft een zekere George Gamov, een Russische geleerde, verteld in een oud (1947) maar leuk boekje: "One two three….infinity". Voor mij was dat trouwens voor het eerst dat ik iets concreets over complexe getallen las.

Voordat we gaan schat zoeken, eerst maar eens vertellen wat voor getallen deze imaginaire (en complexe) getallen eigenlijk zijn. Deze "denkbeeldige" getallen zijn vreemde zaken: ze bestaan niet en toch zijn ze er! Ze hebben te maken met worteltrekken.

Trekken we de wortel uit een positief getal, bijvoorbeeld + 4, dan krijgen we twee uitkomsten: $\sqrt{4} = \pm 2$, want $+2 \times +2 = 4$ maar ook $-2 \times -2 = 4$
Maar nu trekken we de wortel uit – 4! "Dat kan niet," zegt iedereen, "je kunt de wortel niet uit een negatief getal trekken, er is geen enkel getal waarvan het kwadraat de uitkomst – 4 oplevert!" Toch duiken die wortels uit negatieve getallen in berekeningen nogal eens op en op een gegeven moment ging een wiskundige (dat was toch Euler?) er gewoon vanuit dat ze wél bestaan. Hij stelde eenvoudig dat:

$\sqrt{-1}$ = **"i"** (van imaginair). Ze worden trouwens ook wel eens met **j** aangeduid!

Nu gaan we verder en bekijken de regels voor deze getallen. Kun je er net zo mee rekenen als "gewone" getallen? Jazeker! Je moet alleen wat weten. Het belangrijkste is dat:

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1 \quad \text{dus:} \quad i \times i = \underline{i^2 = -1\,!}$$

$$\text{Ook is } \sqrt{-1} : \sqrt{-1} = i : i = +1$$

Verder moeten we ook nog weten hoe de negatieve wortels in imaginaire getallen omgezet worden.

$$\sqrt{-4} = 2 \,.\, \sqrt{-1} = 2i \quad \text{dus} \quad \sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1} = \text{"}a\,.\,i\text{" of "}ai\text{"} \quad (\text{waarin } a \neq 0)$$

Nu krijgen we nog de combinatie van normale en imaginaire getallen. Deze getallen noemt men "complexe" getallen en deze getallen bestaan dus uit een "reëel" en een "imaginair" deel. Zo'n getal geven we dan met letters aan als:

a + bi , waarin **a** het reële en **bi** het imaginaire deel is.

Maar…. wat kunnen we er eigenlijk mee? Van alles! Eerst: hoe gaan we ermee om! We gaan er snel doorheen.

Optellen:

$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)\,i$

$(2 + 3i) + (5 + 7i) = 2 + 5 + (3 + 7)\,i = 7 + 10i$

Aftrekken:

$(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = a - c + (b - d)\,i$

$(5 + 3i) - (4 + 6i) = 5 + 3i - 4 - 6i = 1 - 3i$

Vermenigvuldigen:

$ai \times i = ai^2 = a \times -1 = -a$ dus $3i \times i = 3i^2 = -3$

$(a + bi) \times (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + (ad + bc)\,i + bd(-1) =$
$= ac - bd + (ad + bc)\,i$
Voorbeeld:
$(2 + 7i) \times (3 + 5i) = 2.3 + 2.5i + 7.3i + 35i^2 = 6 + 10i + 21i - 35 = -29 + 31i$

Delen:

$ai : i = a$, want $i : i = +1$ en zo is $3i : i = 3$

Het delen van complexe getallen gaat niet zo maar, daar moeten we een truc bij toepassen, namelijk teller en noemer met een zelfde getal vermenigvuldigen, maar op zó'n manier dat we in de noemer het merkwaardig product $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ verkrijgen, dus zo:

$$\frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 - (di)^2}$$

Daar $i^2 = -1$ wordt dan i uit de noemer verwijderd! Voorbeeld:

$$\frac{(3 + 2i)}{(4 - 3i)} = \frac{(3 + 2i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{12 + 9i + 8i - 6}{16 + 9} = \frac{6 + 17i}{25} = 0{,}24 + 0{,}68i$$

Machtsverheffen:

$i^2 = -1$ $\quad$ $i^3 = -1.\sqrt{-1} = -i$ $\quad$ $i^4 = -1 \times -1 = 1$
Voorbeeld:
$(3 - 16i)^2 = 9 - 2.3.16i + (16i)^2 = 9 - 96i + (256 \times -1) = -247 - 96i$

Worteltrekken:

$\sqrt{(4 + 3i)} = ?$ Hoe moet dat nu weer?

Ja, wat nu? Daarvoor moeten we ook weer een truc toepassen. We nemen gewoon aan dat de wortel uit een complex getal wéér een complex getal oplevert. Dus we zeggen dat:

$\sqrt{(4 + 3i)} = a + bi$

We kwadrateren beide leden van deze “gelijkheid”, dat mag!

$\{\sqrt{(4 + 3i)}\}^2 = (a + bi)^2$

$4 + 3i \quad = \quad a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi + (b^2.-1)$ want $i^2 = -1$, dus is

$b^2.-1 = -b^2 \rightarrow 4 + 3i = a^2 + 2abi - b^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i$

We stellen nu dus dat: $4 = a^2 - b^2$ (het reële deel) en $3i = 2ab.i$ (het imaginaire deel).

$3i = 2ab.i \rightarrow 3 = 2ab \rightarrow b = \frac{3}{2a}$

Nu kunnen we a en b oplossen:

dus $a^2 - b^2 = a^2 - \frac{3^2}{(2a)^2} = a^2 - \frac{9}{4a^2} = 4$ (want $a^2 - b^2 = 4$)

Dit wordt een (oplosbare) 4^e graadsvergelijking. Om die op te lossen stellen we:

$a^2 = x$ dan is: $a^2 - \frac{9}{4a^2} = x - \frac{9}{4x} = 4 \rightarrow \frac{4x^2 - 9}{4x} = 4$

Kruiselings vermenigvuldigen geeft dan: $4x^2 - 9 = 16x$

Daaruit krijgen we de vierkantsvergelijking:

$4x^2 - 16x - 9 = 0$

Deze kunnen we oplossen:

$x_{12} = \frac{16 \pm \sqrt{(16^2 + 4.4.9)}}{2.4} = \frac{16 \pm \sqrt{400}}{8} = \frac{16 \pm 20}{8}$

We gebruiken alleen de positieve x, dus is $x = (16 + 20) : 8 = 4{,}5$

$x = a^2$ dus $a = \sqrt{x} = \sqrt{4{,}5} \quad \rightarrow \quad a = \underline{2{,}1213}$

$b = 3 : 2a = 3 : 4{,}2426 = 0{,}7071 \rightarrow \quad b = \underline{0{,}7071}$

Nu hebben we alles, dus we weten nu wat de wortel uit 4 + 3i is:

$\sqrt{(4 + 3i)} = a + bi = \underline{2{,}1213 + 0{,}7071.\,i}$

(Zou dát niet makkelijker kunnen?)

Het complexe vlak

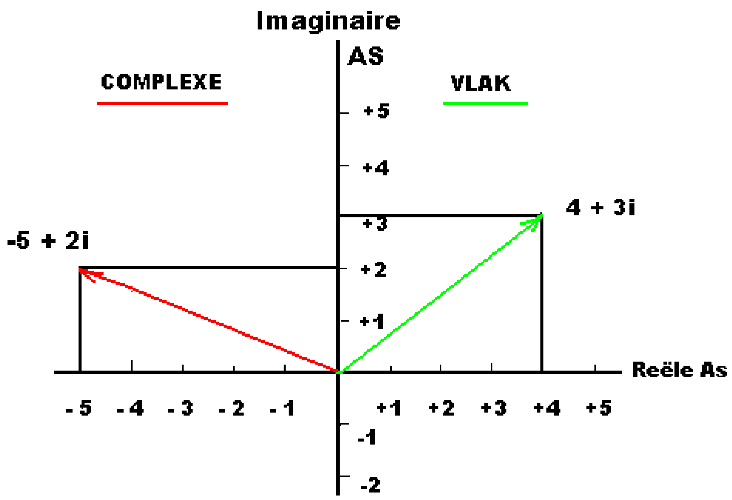
Maar we zouden toch proberen te weten komen hoe je de schat op dat eiland met behulp van deze wiskunde kan vinden? Dan moeten we eerst toch nog wat meer weten, onder andere hoe we complexe getallen grafisch moeten weergeven.

De reeks van “normale” reële getallen kunnen we als een rechte lijn aangeven: de “lijn der getallen”. Ergens, normalerwijze in ’t midden, zetten we het 0-punt, de positieve getallen lopen naar rechts, de negatieve naar links!

-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8

Fig. 19.29 Lijn der reële getallen

Willen we nu een “complex” getal grafisch weergeven, dan ligt het het reële gedeelte óp de horizontale as en het imaginaire deel erboven (positief) of eronder (negatief). Daartoe richten we in het 0-punt een verticale as op, de “imaginaire” as. Deze verticale as wordt dan de “imaginaire” as van het “complexe” vlak. De horizontale lijn is de “reële”as. In dit “complexe” vlak kunnen we complexe getallen nu grafisch aangeven!



Als voorbeeld nemen we weer de complexe getallen “ **4 + 3i** ” en “ **-5 + 2i** ”. Met de bekende regels voor positief en negatief kunnen we deze nu gemakkelijk aangeven.

Fig. 19.30 Reële as en Imaginaire as met complexe getallen: **4 + 3i** en **– 5 + 2i .**

Het “draaien” van complexe getallen.

Nu is er met de complexe getallen nog wat anders, wat bijzonders, aan de hand. Men ontdekte dat imaginaire en complexe getallen grafisch 90^0 “draaien” als ze met i of –i vermenigvuldigd worden: een reëel getal a vermenigvuldigd met i wordt ai en draait linksom, vermenigvuldigen we a met – i dan krijgen we – ai en dan draait het rechtsom. Bij voorbeeld:

We zetten nu het reële getal 3 op de reële as en vermenigvuldigen dit met i en krijgen dan het imaginaire getal 3i. Dit getal 3i staat nu op de imaginaire as en we zien dan dat het getal 3 dus 90^0 linksom gedraaid is. Nemen we nu getal -5 en vermenigvuldigen we dit met –i dan krijgen we -5 x – i = 5i. Als we 5i aangeven op de imaginaire as, dan blijkt het reële getal -5 óók precies 90^0, maar nu rechtsom gedraaid te zijn, alleen maar door de vermenigvuldiging met – i !

We kunnen dus concluderen dat een reëel getal vermenigvuldigd met **“i”: links om** draait en met **“– i”: rechts om**. Hetzelfde blijkt te gebeuren met complexe getallen. Kijk maar naar de volgende afbeelding: We nemen we het getal 3 + 4i en vermenigvuldigen dit met “i”, dan krijgen we:

$(3 + 4i) \times i = 3i + 4i^2 = 3i - 4$, (want $i^2 = -1$) $= -4 + 3i$.

We geven beide getallen grafisch aan en we zien ook hier dat er een draai van 90^0 gemaakt is en wel linksom. Vermenigvuldigen we een complex getal dus met i, dan draait dit **links**om (tegen de klok in) en doen we hetzelfde met –i dan maakt het getal (eigenlijk de pijl, die “**modulus**” genoemd wordt) een draai van 90^0 **rechts**om (met de klok mee), wanneer deze getallen grafisch in een “complex vlak” aangegeven zijn.

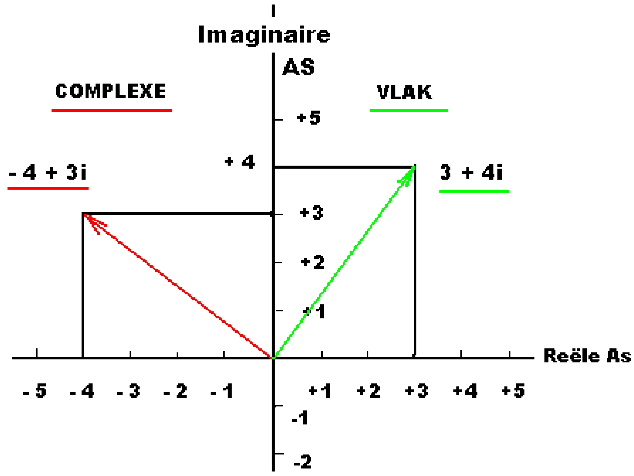


Fig.19-31 Draaiing complex getal.
Het 0-punt is hierbij het draaipunt.

Gamov’s schatzoekerij

Met deze eigenschap kunnen we eindelijk gaan schatzoeken! Wat stond er nu precies in dat document?

“OP DE NOORDZIJDE VAN HET EILAND LIGT EEN GROTE WEIDE, WAAROP EEN EENZAME EIK EN EEN EENZAME DENNENBOOM STAAN. JE ZULT DAAR OOK EEN OUDE GALG ZIEN.
BEGIN BIJ DE GALG EN LOOP NAAR DE EIK EN TEL HET AANTAL VOETSTAPPEN. GA BIJ DE EIK DAN RECHTSAF, MET EEN HOEK VAN 90° EN DOE HET ZELFDE AANTAL VOETSTAPPEN IN DE NIEUWE RICHTING. STEEK DAAR EEN STOK IN DE GROND!
GA NU TERUG NAAR DE GALG, LOOP DAN NAAR DE DEN EN TEL OOK DAN HET AANTAL VOETSTAPPEN. GA BIJ DE DEN LINKSAF MET EEN RECHTE HOEK EN DOE HETZELFDE AANTAL STAPPEN. STEEK OOK DAAR EEN STOK IN DE GROND!
ALS JE NU HALVERWEGE DE TWEE STOKKEN GAAT GRAVEN, ZUL JE DAAR DE SCHAT VINDEN!”

Maar ja, het bleek dat de galg verdwenen was en hoe vinden we nu de schat zonder de plaats van de galg te weten? Dat kan tóch, dan moeten we het veld, waar de schat zou liggen, beschouwen als een “complex veld, een veld met complexe getallen.

We trekken eerst een lijn van boom naar boom en beschouwen deze als “reële as”. We delen deze lijn doormidden en laten de “imaginaire” as hier door lopen. We stellen dat de afstand eik – dennenboom: 2 (lengte-eenheden) bedraagt. De den ligt dan +1 vanaf het midden, de eik op -1 (eenheden).

Nu de galg. We weten niet waar de galg staat en we geven hem dus maar een denkbeeldige (imaginaire) plaats en trekken daarvandaan lijnen naar de eik en naar de dennenboom. De plaats van de galg geven we aan met **a + bi.**

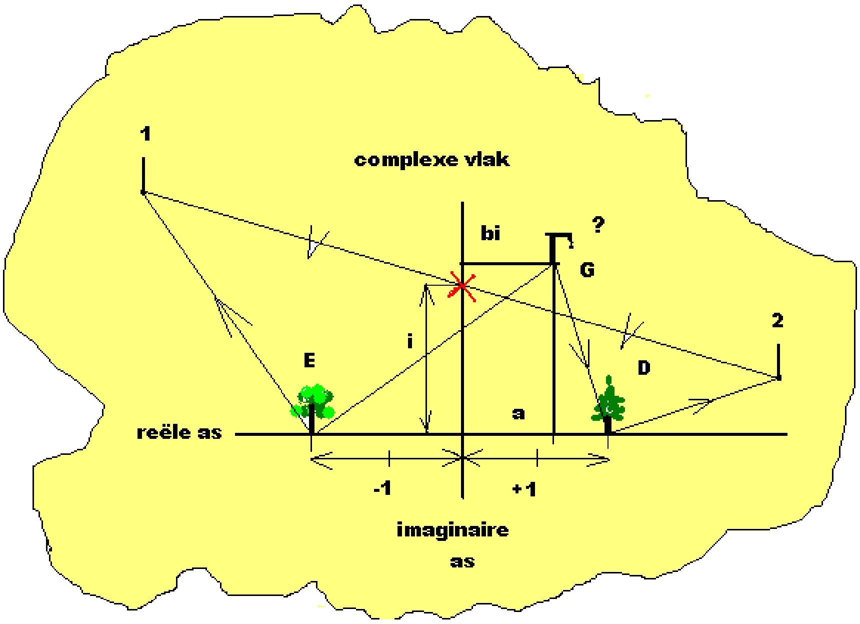


Fig. 19.32 Het veld met de galg **'G'**, eik **'E'** en den **'D'**.

We weten ook niet hoeveel voetstappen de afstanden lang zijn, maar wél dat we bij de bomen een hoek van 90^0 moeten maken. We tekenen dus maar een complex veld en zetten daar de eik, de den en de "imaginaire" galg op. De galg zetten we op een willekeurige plaats "G" op het complexe veld en geven: "G" dus aan met het complexe getal: **a + bi**. George Gamov geeft dit complexe getal de Griekse letter **Γ**, die er toevallig(?) als een galg uitziet. **Γ** is dus **a + bi.**

Nu concludeert George het volgende:

"*If the gallows is at* **Γ** *and the oak at* **-1**, *their separation in distance and direction may be denoted by* (**- 1**) – **Γ** = **-(1 + Γ)**." Opmerking: "**Γ**" is dus: **a + bi.**

Ofwel: "*Als de eik op -1 en de galg op* **Γ** *staat is de separatie": **-1 - Γ = - (1 + Γ).**" Dan vermenigvuldigt hij deze "separatie" met **"– i"** , terwijl we rechtsaf gaan en de "modulus" dus <u>linksom</u> ("counter clockwise") draait. Sorry George, maar dat is toch echt verkeerd en …. waarom is die "separatie": - 1 – Γ, dat is toch een verschil en geen som? Waarom niet -1 + Γ? George gaat verder. Om de locatie van de eerste paal (**1**) te vinden zegt hij dan dat deze "separatie" met **(-i)** vermenigvuldigd moet worden om de eerste paal te krijgen:

"*First spike:* **(- i) [- (1 + Γ)] + 1 = i (Γ + 1) + 1".**

Dus door die "separatie" verkeerd te berekenen komt het toch weer goed en wordt er toch met + **i** vermenigvuldigd. Zou de weledel zeergeleerde heer Gamov bij het bepalen van de *separation* "galg tot eik" de berekening zo gemanipuleerd hebben, dat het toch goed uitkwam?

Voor de "separatie" van de galg tot de dennenboom stelt hij deze "*separation*" op: **+1- Γ** en stelt dan de plaats van de tweede paal op:

"Second spike: **(i) [(+1 - Γ)] - 1 = i (1 –Γ) – 1".**

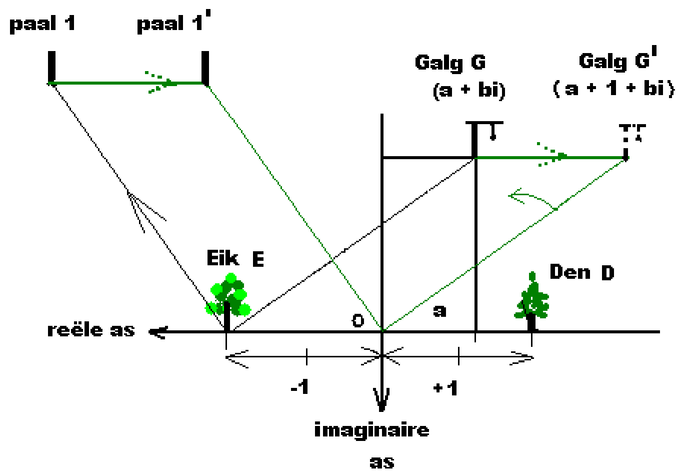
Waarom hij **+1** bij paal (**1**), en **-1** bij paal (**2**) optelt, is mij niet duidelijk. Onvoldoende kennis van complexe wiskunde van mijn zijde? Ik snap dit dus niet!
De schat ligt volgens het document halverwege de lijn tussen paal **1** en **2** en tel je de locaties op en halveer je de som, dan krijgen we de volgende uitkomst:

$$\mathbf{1/2\ \{ i\,(\Gamma + 1) + 1 + i\,(\Gamma - 1) - 1\} = ½\,(i\Gamma + i + 1 - i\Gamma - i - 1) = ½\,(2i) = i}$$

"Da's ook toevallig!" Ja inderdaad. Het is in dit geval dus zo dat, zegt George, wáár de galg ook staat, je zult (als je de aanwijzingen volgt) altijd op het zelfde punt uitkomen, namelijk bij **+ i** (één imaginaire eenheid) op de imaginaire as van het complexe veld!

Het zal allemaal wel kloppen, maar aangezien ik het met de redenering van George niet eens kan zijn, omdat hij de regels van 't draaien overtreedt, ben ik zelf maar eens gaan piekeren en op mijn manier gaan rekenen!

Willen we een "modulus" (vector) in een complex veld 90^0 draaien, door vermenigvuldiging met **i** (linksom) of **–i** (rechtsom), dan moet (volgens mij) het draaipunt in het nulpunt liggen. Om modulus (vector) **GE** te draaien moeten we dus de eik **E** en de galg **G** tijdelijk met "+1" naar rechts verschuiven!



De eik staat dan in het nulpunt en de galg **G (a + bi)** komt dan op punt **G': (a + 1 + bi)**, en dán kunnen we de modulus linksom draaien door deze met **"i"** te vermenigvuldigen.

We krijgen dan:

i (a + 1 + bi) = ai + i + bi ^{2} =
(a + 1) i – b (want i ^{2} = **-**1).

Dit is dus de tijdelijke plaats van paal **1'.**

Fig. 19.33 Verschuiving van eik en galg

We schuiven nu alles weer "1" terug naar links, dus moeten we van het reële deel van het (complexe) getal van paal **1'** de "1" weer aftrekken en komen dan eindelijk op het punt waar we paal **1** kunnen zetten.

Paal **1** staat dus op punt:

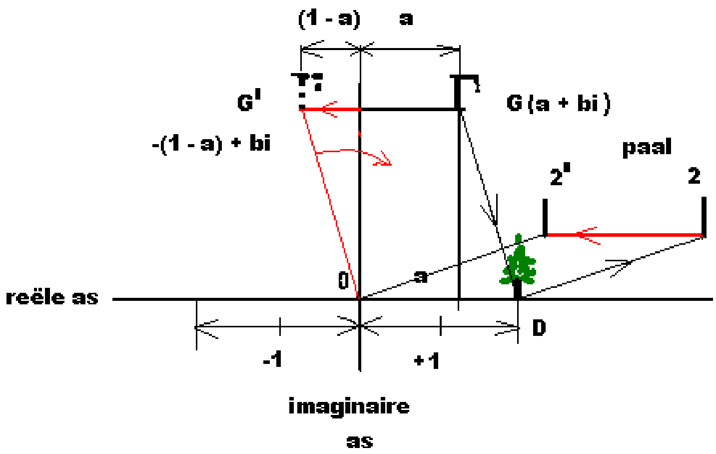
$$\{\mathbf{(a + 1)\,i - b}\} - 1 = (a + 1)\,i - (b + 1) = -\,\mathbf{(b + 1) + (a + 1)\,i}$$

Wat wil dit nu zeggen? Dit betekent volgens het bovenstaande het volgende:

***Draait men een modulus, waarvan het draaipunt een afstand "-1" verschoven ligt (op de reële as) t.o.v. het o-punt, dan wordt het complexe getal* a + bi *van de modulus na linksom draaien:* -(b +1) + (a + 1)i.**

Deze stelling zou algemener kunnen worden door in plaats van de waarde -1 bijv. een afstand “s” te nemen, maar ja, of deze stelling van nut is?

Nu nog de verschuiving van de den **D** en de galg **G** naar links.We verschuiven de galg **G** en de den **D** met “1” naar links. De dennenboom D komt dus tijdelijk in het 0-punt en de galg op punt **G’.** Dit punt **G’** ligt (1-a) links van de imaginaire as (1-a + a = 1).



De nieuwe locatie van **G’** wordt dus: -**(1 – a) + bi = a – 1 + bi,** want we schuiven naar links, naar de negatieve kant.
We gaan van de galg **G’** naar de “den” in het nulpunt en slaan daar met 90^0 linksaf, dan draait de modulus **G’0** dus rechtsom.
We moeten (**a - 1 + bi)** dus vermenigvuldigen met **–i**.

Fig. 19.34 Verschuiving van galg **G** (en dennenboom **D)**

We krijgen nu dus:

$$- i (a - 1 + bi) = - ia + i - bi^2 = i - ai + b = \mathbf{b + (1 - a)i}$$

Dat is de voorlopige plaats van paal **2’**. We schuiven alles nu weer naar rechts terug en moeten dan bij het reële deel van het (complexe) getal van paal **2’** de 1 weer optellen en komen dan op het punt waar we paal **2** neer kunnen zetten. Paal **2** staat dan op plaats:

$$\{b + (1 - a)\, i\} + 1 = \mathbf{1 + b + (1 - a)\, i}\ .$$

Wat leren we hieruit? Het volgende:

***Draait men een modulus, waarvan het draaipunt een afstand “+1” verschoven ligt (op de reële as) t.o.v. het o-punt, dan wordt het complexe getal* (a + bi) *van de modulus na rechtsom draaien:* (1 + b) + (1 - a)i.**

Nou ja, we hebben dus twee nieuwe stellingen waar je, behalve voor schat zoeken, verder weinig aan hebt, denk ik. Maar…, we hebben nu eindelijk wél de twee paaltjes (op mijn manier) neergezet en we kunnen nu dus de schat vinden. Volgens het document ligt deze halverwege de afstand tussen de twee paaltjes **1** en **2** en we moeten dus de complexe waarden van paal **1** en **2** optellen en dan de som door 2 delen om de plek te vinden:

$$\frac{\mathbf{-(b + 1) + (a + 1)\, i \quad + \quad 1 + b + (1 - a)\, i}}{2} = \frac{- b - 1 + ai + i + 1 + b + i - ai}{2} = \frac{2i}{2} = \mathbf{i}$$

De schat ligt dus inderdaad op plaats “ **+ i** ” (één imaginaire eenheid) op de imaginaire as!

Door de beroemde geleerde George Gamov ben ik dus op het spoor van de complexe wiskunde terecht gekomen, maar ik vind het wel enigszins gênant dat ik ook “onvolmaaktheden” van hem tegen moest komen! Maar wie heeft het nu mis? Welke methode deugt er nu wél en welke niet? Aan George Gamov kan ik niets meer vragen. Hij is in 1968 gestorven……

Grieks alfabet

Die wiskundigen gebruiken graag Griekse letters! Waarom toch? Om het onbegrijpelijk te houden? Om interessant te doen? Om minder te hoeven schrijven? Let maar eens op, wiskundeboeken blinken uit in gebrek aan tekst, je moet het maar uit de formules begrijpen! Daarom ook is zelfstudie bijna niet mogelijk. Zouden daarom zoveel mensen een afkeer van de wiskunde hebben?

Terug naar de Griekse letters. De bekendste kennen we allemaal wel: **π** of “pi”, een “onmeetbaar getal” om cirkels mee te berekenen! Deze **π** is ongeveer 3,14. Men heeft pi ontzettend ver berekend (laten berekenen door computers) maar er komt geen eind aan, er zit geen patroon of herhaling in, met recht een “onmeetbaar” getal! Maar er zijn veel meer Griekse letters, allen met een (soms meer dan één) specifieke betekenis (die ik niet alle ken!).
Griekse letters worden nogal eens verschillend geschreven. Hierbij twee uitvoeringen.
Wat wel jammer is, dat ook hierbij de standaardisatie ver te zoeken is. Men gebruikt de letters voor van alles, meestal kleine letters. Ik geef wat voorbeelden, maar zeker geen volledig overzicht.

LETTER			**NAAM**	**BETEKENIS**
Klein	Groot	Europees		
α, α		A	Alfa	Straling: heliumkernen
	Α, Α			Fijnstructuurconstante
β, β		B	Bèta	Straling: elektronen
	Β, Β			
γ, γ		G (K)	Gamma	Elektromagn. Straling
	Γ, Γ			
δ, δ		D	Delta	Zeer kleine verandering
	Δ, Δ			
ε, ε		E	Epsilon	“Permittiviteit” v.h. vacuüm
	Ε, Ε			
ζ, ζ		Z	Zèta (zieta)	
	Ζ, Ζ			
η, η		I	Èta (ieta)	Rendement
	Η, Η			
θ, θ		TH	Thèta (thieta)	
	Θ, Θ			
ι, ι		I (J)	Jota	Daar snappen we niets van
	Ι, Ι			
κ, κ		K	Kappa	
	Κ, Κ			
λ, λ		L	Lambda	Golflengte EM straling
	Λ, Λ			Sonde voor uitlaatgassen
μ, μ		M	Mu (mie)	Micro-; Permeabiliteit
	Μ, Μ			
ν, ν		N	Nu (nie)	
	Ν, Ν			
ξ, ξ		KS	Xi of Ksie	
	Ξ, Ξ			
ο, ο		O	Omikron	
	Ο, Ο			

π, π	Π, Π	P	Pie	Cirkelgetal 3,14…..
ρ, ρ	Ρ, Ρ	R	Rho	Geleidbaarheid, soort. massa
ς σ, ςσ	Σ, Σ	S	Sigma	Sommering van “grootheden”
τ, τ	Τ, Τ	T	Tau	Deeltje
υ, υ	Υ, Υ	I (Y,U)	Ypsilon	Frequentie van straling Verticale coördinaat
φ, φ	Φ, Φ	F	Fie (Phi)	Cosinus φ, arbeidsfactor (elektra) Gulden snede
χ, χ	Χ, Χ	CH	Chi	“De onbekende” Horizontale coördinaat
ψ, ψ	Ψ, Ψ	PS	Psi	
ω, ω	Ω, Ω	O	Omega	ω, Hoeksnelheid Ω, Weerstandsymbool

Atoomwiskunde

Op dit gebied kennen we al een paar formules. Ik twijfel trouwens of deze “atoomwiskunde” wel bij dit hoofdstuk hoort. Maar, veel wat op dit gebied ontdekt is, is “wiskundig” ontdekt. Dus misschien toch wel interessant om er iets verder op in te gaan. Want met deze formules is ook het “Kwantumtijdperk” begonnen, met enorme gevolgen voor de wereld van nú!

- De formule van Planck luidt:

$$\mathbf{E = n \,.\, h.\, \upsilon}$$

E is de Energie, n is een geheel “kwantum”getal is, h is de constante van Planck en **υ** frequentie is. Voor een “foton” geldt **n** = 1, dus **E = h. υ.** Die “h”, de constante van Planck, hoe kwamen ze daaraan? Planck kwam intuïtief op de formule. De letter “**υ”,** is de frequentie van de “straling”. En die konden ze meten, want die volgt direct uit de golflengte volgens:

$\mathbf{\upsilon = c : \lambda}$ of : frequentie (**υ**) = lichtsnelheid (**c**) : golflengte (**λ**)

Door dus de energie en de golflengte van “straling” te meten, kon men deze “constante van Planck” uitrekenen. Maar dan wel terugrekenen naar één elektron “in de grondstaat”. Hoe deden ze dat? De factor **“h”** bedraagt: $0{,}6626176 \times 10^{-33}$ Joule.s. En waarom Joule.seconde? Omdat frequentie een aantal golven per seconde aangeeft en dan krijgen we:

E = Joule.seconde (**h**) x aantal golven / seconde (**λ**) = Joule

En…. de Joule is de eenheid van energie, “E” dus!

De constante van Planck, daterend uit begin 20^{e} eeuw, bleek steeds belangrijker te worden. Hij kwam in steeds meer formules voor, het werd een natuurconstante. “A un momento dado”, op een gegeven moment dus, heeft een zekere Paul Dirac, een Engelse

geleerde, van **h** weer een andere constante gemaakt door **h** te delen door 2 π. Dit werd dus de "constante van Dirac" en werd voorgesteld door een h met een streepje erdoor:
Ook aangegeven als **h** of "**h**streep" of *A**h**. Waarom deed hij dit? Wel, ik denk omdat we een elektron van een atoom als een rondlopende golf kunnen beschouwen, dan betreft **h** dus eigenlijk één rondlopende golf. En, delen we de omtrek van een cirkel door 2 π, dan krijgen we de straal r, want de omtrek van een cirkel is 2 π r! $\hbar$

We kennen **h (** 0,6626176 x 10^{-33}) dus de waarde van **h** is:

$h/2\pi = 0{,}6626176 \times 10^{-33} : (2 \times \pi) = 1{,}05459 \times 10^{-34}$ J.s

Afgerond zeg maar: *** Ah = (h) = 1.05 x 10^{-34} J.s**

Deze Paul Dirac is één van de vaders van de kwantummechanica geweest. Er is nog een reden voor zijn constante: "**h**/2π". Deze **h** dus, blijkt de eenheid van "spin" te zijn, je weet wel, die vreemde "intrinsieke" eigenschap van sommige deeltjes: "Draaien ze nou of draaien ze niet!" Nog éénmaal wat over die "spin". Al eerder besproken in het hoofdstuk "Atoom en theorie". De spin van een deeltje is het: "baanimpulsmoment" en:

"Onder spin van een deeltje, verstaat men de 'hoeveelheid draaiing' of het 'impulsmoment' van een roterend deeltje".

Impulsmoment is dus een combinatie van impuls en moment. Nog even repeteren:

- Impuls. Het symbool is "p". Impuls van een deeltje is: massa x snelheid.
  Dus in eenheden: p = m x v = kg.m/s (officiële eenheid van impuls).
  Massa = Gewicht (Newton): g (m/s^2). Dus in eenheden:
  Impuls p = N : m/s^2 x m/s = N x s^2/m x m/s = N.s (Newton.seconde).

- Moment. "Moment is kracht maal arm", dat hebben we, als het goed is, al heel lang geleden geleerd! Dus M = f x l in Nm (Newtonmeter).

- Nu krijgen we dus de combinatie van beide: "impulsmoment" voor iets dat draait.
  Spin is dus een "impulsmoment" en wordt volgens de natuurkunde als volgt berekend:
  Het **spinimpulsmoment** is m.ω.r^2 (massa x hoeksnelheid x straal ^{2}**).**
  m = massa elektron, ω = de hoeksnelheid in radialen per seconde, r = de straal van het elektron. Nu is snelheid v = ω.r dus ω = v/r dus is het spinimpulsmoment: m.v/r. r^2 = m.v.r ! Welke eenheid? m.v.r is:
  Impuls p x straal r = Newton.seconde x meter = Newtonmeter x seconde = J.s!

De eenheid van spin is dus: "**h**/2π", of "**h**" of **h**streep, de "constante van Dirac", en die komt nogal eens voor! Dus.

"**h**" is de constante van Planck (0,6626176 x 10^{-33} J.s).
"**h**" (**h**-streep) is de constante van Dirac!